★启用前注意保密

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	B	C	B	A	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.（全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	CD	CD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.（第 15 题第一空 2 分，第二空 3 分）

13. $\sqrt{13}$　14. $\dfrac{1}{165}$　15. $\sqrt{2}$；$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　16. $\dfrac{28\pi}{3}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17.（10 分）

（1）解：选条件①，因为 $S_n=na_n-n^2+n$，①

所以 $S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}-(n-1)^2+(n-1)(n\geqslant 2)$. ② ……………………… 1 分

所以①－②，得 $a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}-2n+1+1$，即 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$. ……

…………………………………………………………………………… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列.

所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………… 5 分

选条件②，因为 $nS_{n+1}=(n+1)S_n+n^2+n$，所以 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}+1$，$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=1$. …

…………………………………………………………………………… 1 分

所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以 1 为公差的等差数列，又$\frac{S_1}{1}=a_1=1$，…………………………… 2 分

所以$\frac{S_n}{n}=1+(n-1)\times1=n$，所以 $S_n=n^2$ （$n\in\mathbf{N}^*$）. ………………………… 3 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant2)$. ……………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………… 5 分

选条件③，因为 $\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+1$，所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$. ……………………… 1 分

所以$\{\sqrt{S_n}\}$是以 1 为公差的等差数列. 又 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$， ……………………… 2 分

所以$\sqrt{S_n}=1+(n-1)\times1=n$. 所以 $S_n=n^2$. ………………………………………… 3 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant2)$. ……………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………… 5 分

（2）证明：由（1）知 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $b_n=\frac{4^n}{(2^{2n}-1)(2^{2n+2}-1)}$

$=\frac{4^n}{(4^n-1)(4^{n+1}-1)}$ …………………………………………………………… 6 分

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n-1}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$. ………………………………………………………… 7 分

所以 $T_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{63}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4^n-1}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{63}+\cdots+\frac{1}{4^n-1}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$ ……………………… 8 分

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$ ……………………………………………………………… 9 分

$=\frac{1}{9}-\frac{1}{3(4^{n+1}-1)}<\frac{1}{9}$. ………………………………………………………… 10 分

18. （12 分）

解：

（1）法一：因为 $a\cdot\sin A+a\cdot\sin C\cdot\cos B+b\cdot\sin C\cdot\cos A=b\cdot\sin B+c\cdot\sin A$，

所以根据正弦定理，得 $\sin^2A+\sin A\cdot\sin C\cdot\cos B+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A=\sin^2B+\sin A\cdot\sin C$. ……………………………………………………………………………… 1 分

所以$\sin^2A+\sin C(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)=\sin^2B+\sin A\cdot\sin C$.

所以$\sin^2A+\sin C\cdot\sin(A+B)=\sin^2B+\sin A\cdot\sin C$.

所以$\sin^2A+\sin^2C=\sin^2B+\sin A\cdot\sin C$. ……………………………………………… 2 分

根据正弦定理，得 $a^2+c^2=b^2+ac$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$. ……………………… 3 分

根据余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$. ……………………………… 4 分

因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

法二：因为 $a\cdot\sin A+a\cdot\sin C\cdot\cos B+b\cdot\sin C\cdot\cos A=b\cdot\sin B+c\cdot\sin A$，

所以根据正弦定理，得 $a^2+ac\cdot\cos B+bc\cdot\cos A=b^2+ac.$ ………………… 1 分

根据余弦定理，得 $a^2+ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2+ac.$ ………… 2 分

即 $a^2+c^2-b^2=ac.$ ……………………………………………………………… 3 分

根据余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}.$ …………………………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}.$ …………………………………………… 5 分

（2）由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B.$

所以 $54=a^2+18-3\sqrt{2}a$，即 $a^2-3\sqrt{2}a-36=0.$ …………………………… 7 分

所以 $(a-6\sqrt{2})(a+3\sqrt{2})=0$. 因为 $a>0$，所以 $a=6\sqrt{2}.$ ………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以 $BD=\dfrac{1}{3}BC=2\sqrt{2}.$ …………………………………………………… 10 分

所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$ …… 12 分

19. （12 分）

（1）证明：因为 $\angle BAD=90°$，所以 $AD\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AD\perp$ 平面 PAB. 所以 $AD\perp PA$. ………………………………………… 2 分

因为 $\angle BAD=90°$，$BC/\!/AD$，

所以 $\angle ABC=90°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

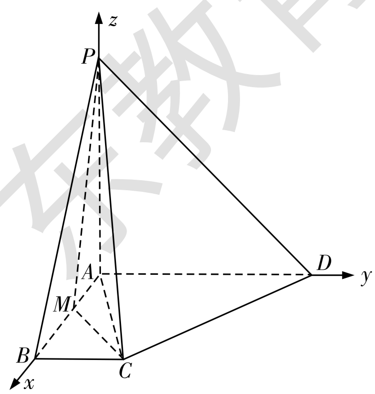
因为 $PA=4$，$PC=\sqrt{21}$，所以 $PA^2+AC^2=PC^2$，

所以 $PA\perp AC$. ………………………………… 4 分

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

$AC\cap AD=A$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………… 5 分



（2）解：以 A 为原点，以 AB，AD，AP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$，如图所示，

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,4)$.

设 $M(a,0,0)(a\in[0,2])$，所以 $\overrightarrow{PC}=(2,1,-4)$，$\overrightarrow{MC}=(2-a,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,3,0)$. …………………………………………………………… 7 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=(2,1,-4)\cdot(x_1,y_1,z_1)=2x_1+y_1-4z_1=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=(-2,3,0)\cdot(x_1,y_1,z_1)=-2x_1+3y_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=2$，得 $x_1=3$，$z_1=2$. 所以 $\boldsymbol{n}=(3,2,2)$. ………………………………… 9 分

所以 $|\cos<\overrightarrow{MC},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{MC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{MC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|8-3a|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{(a-2)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{221}}{17}$. … 10 分

化简，得 $4a^2-4a+1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………… 11 分

所以存在点 M，使得 MC 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{221}}{17}$，

此时 $\dfrac{AM}{AB}$ 的值为$\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………………………………… 12 分

20. (12 分)

解：

(1) 由题意可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2b^2}{a}\times c=\dfrac{3}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………… 4 分

(2) 设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 (1) 易求得 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

当直线 l 的斜率不存在时，设其方程为 $x=x_0(-2<x_0<2$ 且 $x_0\neq1)$，

联立$\begin{cases}x=x_0,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=x_0,\\ y^2=3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right).\end{cases}$ 因为$\begin{cases}x_1=x_2=x_0,\\ y_1=-y_2,\end{cases}$

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-\dfrac{3}{2}}{x_2-1}=-\dfrac{9}{4}$，即 $2{x_0}^2-3x_0+1=0$.

解得 $x_0=\dfrac{1}{2}$或 $x_0=1$（舍），此时点 P 到直线 l 的距离为$\dfrac{1}{2}$. ………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

则$\begin{cases}\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)\cdot(4m^2-12)>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2},\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ …………………………………… 8 分

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-\dfrac{3}{2}}{x_2-1}=-\dfrac{9}{4}$，即$\left(y_1-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(y_2-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}(x_1-1)\cdot$

(x_2-1).

所以$\left(kx_1+m-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(kx_2+m-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}(x_1-1)\cdot(x_2-1)$.

即$\left(k^2+\dfrac{9}{4}\right)\cdot x_1x_2+\left[k\left(m-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{9}{4}\right](x_1+x_2)+\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}=0$.

整理得$2k^2+4m^2-3m+6km-\dfrac{9}{2}=0$.

即$\left(k+m-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(2k+4m+3)=0$，所以$k+m-\dfrac{3}{2}=0$或$2k+4m+3=0$. …… 10 分

若$k+m-\dfrac{3}{2}=0$，则直线l的方程为$y-\dfrac{3}{2}=k(x-1)$.

所以直线l过定点$N\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$，不合题意.

若$2k+4m+3=0$，则直线l的方程为$y+\dfrac{3}{4}=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，所以直线$l$过定点$Q\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$.

又因为$\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{3}<1$，所以点$Q$在椭圆$C$内.

设点P到直线l的距离为d，所以$d_{\max}=PQ=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left[\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]^2}=\dfrac{\sqrt{85}}{4}>\dfrac{1}{2}$.

所以点P到直线l距离的最大值为$\dfrac{\sqrt{85}}{4}$. …………………………………………… 12 分

21. （12 分）

（1）解：由题知函数$f(x)$的定义域为$(0,\ +\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$. ……………………………………………………………………………………… 1 分

当$a=0$时，则$f(x)=\ln x+1$，$f(x)$有唯一零点e^{-1}.

当$a<0$时，则$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上是增函数，又$f(e^{-1})=-ae^{-1}>0$，$f(e^{a-1})=a(1-e^{a-1})<0$，故$\exists x_1\in(e^{a-1},\ e^{-1})$，使得$f(x_1)=0$，

此时$f(x)$有唯一零点x_1. ……………………………………………………………… 2 分

当$a>0$时，则当$0<x<\dfrac{1}{a}$时$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$上单调递增；当$x>\dfrac{1}{a}$时$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{a},\ +\infty\right)$上单调递减.

所以$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}$. …………………………………………………… 3 分

当$a=1$时，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=f(1)=\ln 1=0$，所以$f(x)$有唯一零点 1.

当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}<0$，$f(x)$无零点.

当 $0<a<1$ 时，$f(x)_{\max}>0$ 且 $f(e^{-1})=-ae^{-1}<0$，故 $\exists x_2\in\left(e^{-1},\frac{1}{a}\right)$，使得 $f(x_2)=0$.

$f\left(\frac{e}{a^2}\right)=\ln\frac{e}{a^2}-\frac{e}{a}+1=\ln\frac{e^2}{a^2}-\frac{e}{a}=2\ln\frac{e}{a}-\frac{e}{a}$，

令 $g(x)=2\ln x-x$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1$.

因为当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(0,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减.

所以 $g(x)_{\max}=g(2)=2\ln 2-2<0$.

所以 $2\ln x-x<0$.

所以 $f\left(\frac{e}{a^2}\right)=2\ln\frac{e}{a}-\frac{e}{a}<0$.

故 $\exists x_3\in\left(\frac{1}{a},\frac{e}{a^2}\right)$，使得 $f(x_3)=0$.

所以当 $0<a<1$ 时，$f(x)$有两个零点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$ 时，$f(x)$有唯一零点；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$有两个零点；

当 $a>1$ 时，$f(x)$无零点. ………………………………………………………… 5 分

（2）证明：令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{e}x$，由(1)可知 $0<a<1$，$h(x)_{\max}=h(e)=0$，

所以 $h(x)\leqslant 0$. 所以 $\ln x\leqslant\frac{1}{e}x$. 所以 $\ln\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{ae}$. 所以 $-2e\ln a\leqslant\frac{2}{a}$. ……… 7 分

令 $Q(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，所以 $Q'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

所以$Q(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以 $Q(x)>Q(1)=0$. 所以 $\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$. ……… 9 分

又 x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，所以 $\begin{cases}\ln x_1-ax_1+1=0,\\ \ln x_2-ax_2+1=0,\end{cases}$ 两式相减，得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$. ……………………………………………………………… 10 分

不妨设 $x_1>x_2$，则 $\frac{x_1}{x_2}>1$. 所以 $a(x_1-x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$.

所以 $a(x_1-x_2)>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$. 所以 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$. 所以 $x_1+x_2>\frac{2}{a}\geqslant -2e\ln a$.

所以 $x_1+x_2+2e\ln a>0$. ……………………………………………………… 12 分

22. （12 分）

解：

（1）①批次Ⅰ成品口罩的次品率为

$p_{\mathrm{I}}=1-[(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)]=1-\dfrac{34}{35}\times\dfrac{33}{34}\times\dfrac{32}{33}=\dfrac{3}{35}$. ……………………… 2 分

②设批次Ⅰ的成品口罩红外线自动检测合格为事件 A，人工抽检合格为事件 B，

由已知，得 $P(A)=\dfrac{92}{100}$，$P(AB)=1-p_{\mathrm{I}}=1-\dfrac{3}{35}=\dfrac{32}{35}$，

则工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个口罩恰为合格品为事件 $B|A$，

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{32}{35}\times\dfrac{100}{92}=\dfrac{8\times20}{7\times23}=\dfrac{160}{161}\approx99.38\%$. ……………………… 5 分

（2）100 个成品口罩中恰有 1 个不合格品的概率 $\varphi(p)=\mathrm{C}_{100}^{1}p\cdot(1-p)^{99}$.

因此 $\varphi'(p)=100\,[(1-p)^{99}-99p\,(1-p)^{98}]=100\,(1-p)^{98}\cdot(1-100p)$.

令 $\varphi'(p)=0$，得 $p=0.01$.

当 $p\in(0,\ 0.01)$ 时，$\varphi'(p)>0$；当 $p\in(0.01,1)$时，$\varphi'(p)<0$.

所以 $\varphi(p)$的最大值点为 $p_0=0.01$. ……………………………………………… 7 分

由（1）可知，$p_{\mathrm{I}}=\dfrac{3}{35}\approx0.09$，$p_{\mathrm{J}}=p_0=0.01$，故批次 J 口罩的次品率低于批次Ⅰ，

故批次 J 的口罩质量优于批次Ⅰ.

由条形图可建立 2×2 列联表如下：

单位：人

核酸检测结果	口罩批次		合计
	Ⅰ	J	
呈阳性	12	3	15
呈阴性	28	57	85
合计	40	60	100

……………………………………………………………………………………… 8 分

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{100\times(12\times57-28\times3)^2}{40\times60\times15\times85}$$ ……………………………………… 9 分

$$=\frac{100\times600\times600}{40\times60\times15\times85}=\frac{200}{17}\approx11.765>10.828.$$ ……………………………… 11 分

因此，有 99.9% 的把握认为口罩质量与感染新冠肺炎病毒的风险有关. … 12 分