绝密★启用前

第 I 卷（选择题）

请点击修改第 I 卷的文字说明

一、单选题

1．复数$\frac{3+i}{1+i}$等于（　）

A．$1+2i$　　B．$1-2i$　　C．$2+i$　　D．$2-i$

2．设集合$A=\{1,2,4\}$，$B=\{x|x^2-4x+m=0\}$．若$A\cap B=\{1\}$，则$B=$（　　）

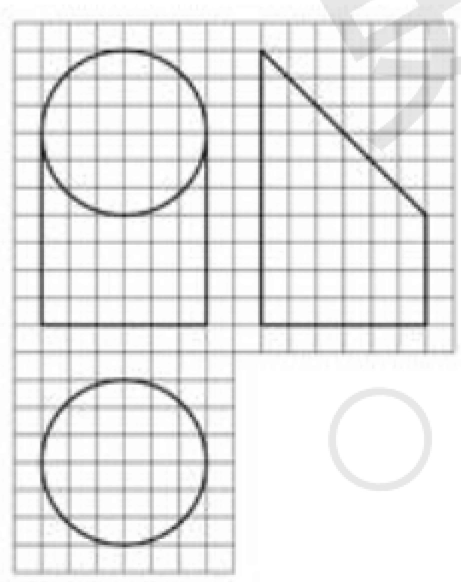
A．$\{1,-3\}$　　B．$\{1,0\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{1,5\}$

3．我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯

A．1 盏　　B．3 盏

C．5 盏　　D．9 盏

4．如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为



A．90π　　B．63π　　C．42π　　D．36π

5．设x,y满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\2x-3y+3\ge 0\\y+3\ge 0\end{cases}$，则$z=2x+y$的最小值是(　　)

A．-15　　B．-9　　C．1　　D．9

6．安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安

排方式共有(　　)

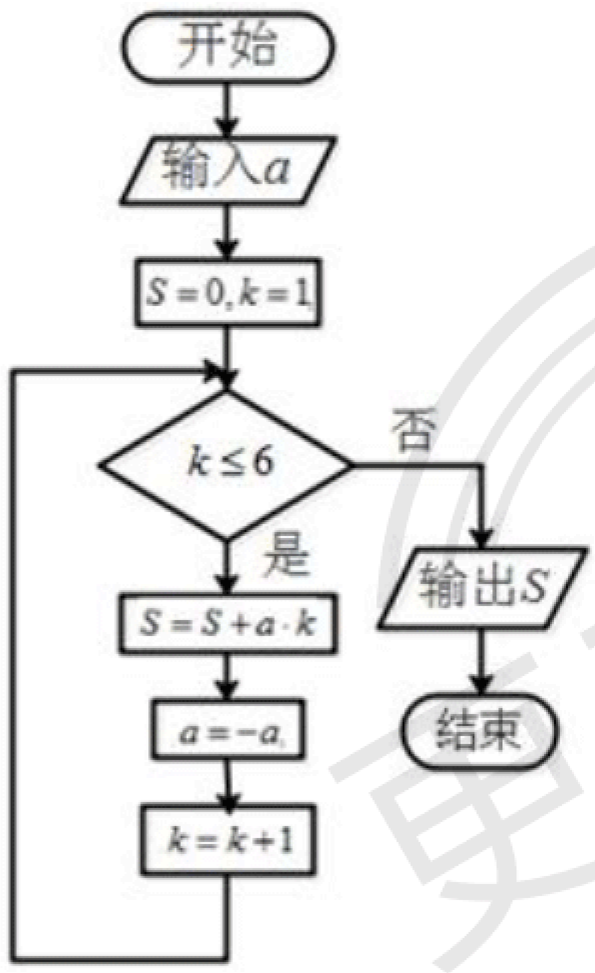
A．12 种　　　B．18 种　　　C．24 种　　　D．36 种

7．甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则(　　)

A．乙可以知道四人的成绩　　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

8．执行如图所示的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 $S=$



A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．5

9．若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为　　　　(　　)

A．2　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．$\sqrt{2}$　　　D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11．若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为（　　）．

A．-1　　B．$-2e^{-3}$　　C．$5e^{-3}$　　D．1

12．已知 ΔABC 是边长为 4 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是

A．-2　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．-3　　D．-6

第 II 卷（非选择题）

请点击修改第 II 卷的文字说明

二、填空题

13．一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次，X 表示抽到的二等品件数，则 $DX=$__________.

14．函数 $f\left(x\right)=\sin^2x+\sqrt{3}cosx-\frac{3}{4}$（$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$）的最大值是________.

15．（2017 新课标全国 II 理科）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$__________.

16．已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N．若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$__________.

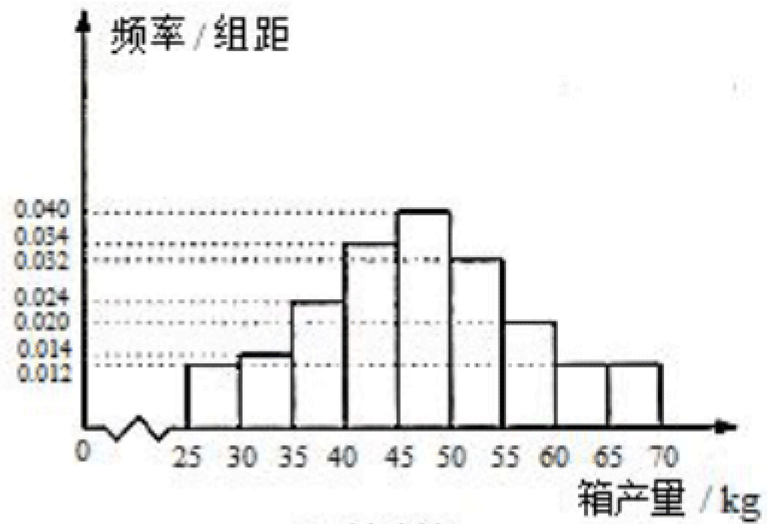
三、解答题

17．ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$．

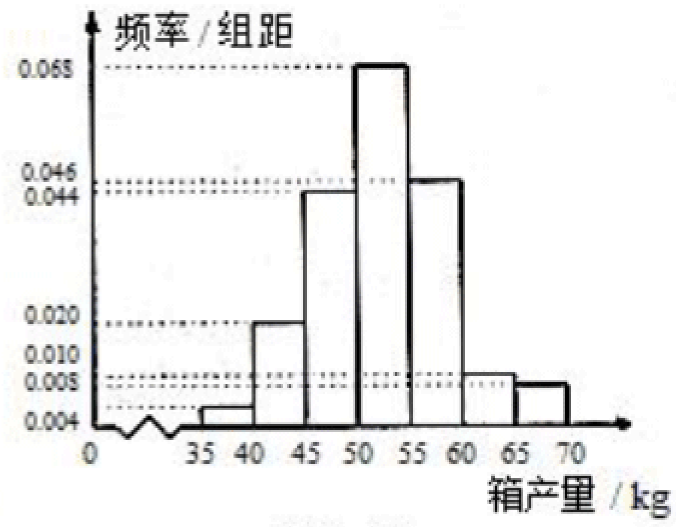
（1）求 $\cos B$；

（2）若 $a+c=6$，ΔABC 面积为 2，求 b．

18．(2017 新课标全国 II 理科）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg）．其频率分布直方图如下：



旧养殖法



新养殖法

（1）设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件："旧养殖法的箱产量低于 50 kg，新养殖法的箱产量不低于 50 kg"，估计 A 的概率；

（2）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50 kg	箱产量≥50 kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3）根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）.

附：

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

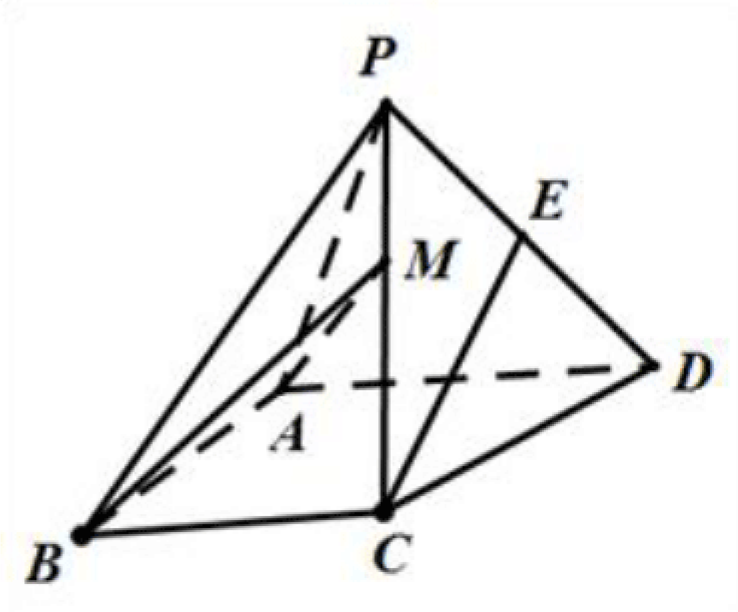
，

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

19．如图，四棱锥 P-ABCD 中，侧面 PAD 是边长为 2 的等边三角形且垂直于底 $ABCD$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD, \angle BAD=\angle ABC=90^{\circ}$，$E$ 是 PD 的中点.

（1）证明：直线 $CE//$平面 PAB；

（2）点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°，求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



20．设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$．

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21．已知函数 $f\left(x\right)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f\left(x\right)\geq 0$.

（1）求 a；

（2）证明：$f\left(x\right)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f\left(x_0\right)<2^{-2}$.

22．在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，点 B 在曲线 C_2 上，求 ΔABO 面积的最大值.

23．已知 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$，证明：

(1) $(a+b)\left(a^5+b^5\right)\geq 4$；

(2) $a+b\leq 2$.

1．D

【解析】

【分析】

根据复数的除法运算得到结果.

【详解】

$\frac{3+\mathrm{i}}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-2i}{2}=2-\mathrm{i}$.

故选 D.

【点睛】

这个题目考查了复数的除法运算，复数常考的还有几何意义，z＝a＋bi(a，b∈R)与复平面上的点 Z(a，b)、平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 都可建立一一对应的关系(其中 O 是坐标原点)；复平面内，实轴上的点都表示实数；虚轴上的点除原点外都表示纯虚数. 涉及到共轭复数的概念，一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数，复数 z 的共轭复数记作 $\overline{z}$.

2．C

【解析】

∵ 集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x \mid x^2-4x+m=0\}$，$A\cap B=\{1\}$

∴ $x=1$ 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的解，即 $1-4+m=0$

∴ $m=3$

∴ $B=\{x \mid x^2-4x+m=0\}=\{x \mid x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$，故选 C

3．B

【解析】

【详解】

设塔顶的 a_1 盏灯，

由题意 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

∴$S_7=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}=381$，

解得 $a_1=3$.

故选 B．

4．B

【解析】

由题意，该几何体是由高为 6 的圆柱截取一半后的图形加上高为 4 的圆柱，故其体积为$V=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot3^2\cdot6+\pi\cdot3^2\cdot4=63\pi$，故选 B.

点睛:（1）解答此类题目的关键是由多面体的三视图想象出空间几何体的形状并画出其直观图.

（2）三视图中“正侧一样高、正俯一样长、俯侧一样宽”，因此，可以根据三视图的形状及相关数据推断出原几何图形中的点、线、面之间的位置关系及相关数据.

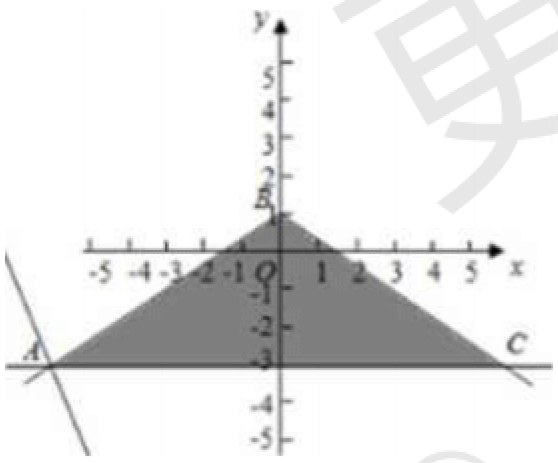
5．A

【解析】

【分析】

由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，联立方程组求得最优解的坐标，把最优解的坐标代入目标函数得结论.

【详解】



作出$\begin{cases}2x+3y-3\le0\\2x-3y+3\ge0\\y+3\ge0\end{cases}$表示的可行域，如图，

由$\begin{cases}2x+3y-3=0\\2x-3y+3=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x=-6\\y=-3\end{cases}$，

将$z=2x+y$变形为$y=-2x+z$，

平移直线 $y=-2x+z$，

由图可知当直 $y=-2x+z$ 经过点 $(-6,-3)$ 时，

直线在 y 轴上的截距最小，

最小值为 $z=2\times(-6)-3=-15$，故选 A.

【点睛】

本题主要考查线性规划中，利用可行域求目标函数的最值，属于简单题.求目标函数最值的一般步骤是“一画、二移、三求”：（1）作出可行域（一定要注意是实线还是虚线）；（2）找到目标函数对应的最优解对应点（在可行域内平移变形后的目标函数，最先通过或最后通过的顶点就是最优解）；（3）将最优解坐标代入目标函数求出最值.

6．D

【解析】

4 项工作分成 3 组,可得：C_4^2=6，

安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，

可得：$6\times A_3^3=36$ 种.

故选 D.

7．D

【解析】

【分析】

根据四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，继而可以推出正确答案

【详解】

解：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

→乙丙必有一优一良，（若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩）

→乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

→丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩，

给甲看乙丙成绩，甲不知道自己的成绩，说明乙丙一优一良，假定乙丙都是优，则甲是

良，假定乙丙都是良，则甲是优，那么甲就知道自己的成绩了．给乙看丙成绩，乙没有说不知道自己的成绩，假定丙是优，则乙是良，乙就知道自己成绩．给丁看甲成绩，因为甲不知道自己成绩，乙丙是一优一良，则甲丁也是一优一良，丁看到甲成绩，假定甲是优，则丁是良，丁肯定知道自己的成绩了

故选：D.

【点睛】

本题考查了合情推理的问题，关键掌握四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，属于中档题.

8．B

【解析】

【详解】

阅读流程图，初始化数值 $a=-1,k=1,S=0$.

循环结果执行如下：

第一次：$S=0-1=-1,a=1,k=2$；

第二次：$S=-1+2=1,a=-1,k=3$；

第三次：$S=1-3=-2,a=1,k=4$；

第四次：$S=-2+4=2,a=-1,k=5$；

第五次：$S=2-5=-3,a=1,k=6$；

第六次：$S=-3+6=3,a=-1,k=7$，

结束循环，输出 $S=3$.故选 B.

点睛:算法与流程图的考查，侧重于对流程图循环结构的考查.求解时，先明晰算法及流程图的相关概念，包括选择结构、循环结构、伪代码，其次要重视循环起点条件、循环次数、循环终止条件，更要通过循环规律，明确流程图研究的数学问题，如：是求和还是求项.

9．A

【解析】

由几何关系可得，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的渐近线方程为 $bx\pm ay=0$ ，圆

心$(2,0)$到渐近线距离为$d=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，则点$(2,0)$到直线$bx+ay=0$的距离为

$$d=\frac{|2b+a\times 0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2b}{c}=\sqrt{3},$$

即$\frac{4(c^2-a^2)}{c^2}=3$，整理可得$c^2=4a^2$，双曲线的离心率$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{4}=2$．故选A．

点睛:双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质，求双曲线的离心率(或离心率的取值范围)，常见有两种方法：①求出a，c，代入公式$e=\frac{c}{a}$；②只需要根据一个条件得到关于a，b，c的齐次式，结合$b^2=c^2-a^2$转化为a，c的齐次式，然后等式(不等式)两边分别除以a或a^2转化为关于e的方程(不等式)，解方程(不等式)即可得e(e的取值范围).

10．C

【解析】

如图所示，补成直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

则所求角为

$\angle BC_1D, \because BC_1=\sqrt{2}, BD=\sqrt{2^2+1-2\times 2\times 1\times\cos 60^\circ}=\sqrt{3}, C_1D=AB_1=\sqrt{5}$，

易得$C_1D^2=BD^2+BC_1^2$，因此$\cos\angle BC_1D=\frac{BC_1}{C_1D}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故选C.

平移法是求异面直线所成角的常用方法，其基本思路是通过平移直线，把异面问题化归为共面问题来解决，具体步骤如下：

①平移：平移异面直线中的一条或两条，作出异面直线所成的角；

②认定：证明作出的角就是所求异面直线所成的角；

③计算：求该角的值，常利用解三角形；

④取舍：由异面直线所成的角的取值范围是$(0,\frac{\pi}{2}]$，当所作的角为钝角时，应取它的补角作为两条异面直线所成的角．求异面直线所成的角要特别注意异面直线之间所成角的范围．

11．A

【解析】

由题可得 $f'(x)=(2x+a)e^{x-1}+(x^2+ax-1)e^{x-1}=\left[x^2+(a+2)x+a-1\right]e^{x-1}$，

因为 $f'(-2)=0$，所以 $a=-1$，$f(x)=(x^2-x-1)e^{x-1}$，故 $f'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-1-1)e^{1-1}=-1$，故选 A．

【名师点睛】（1）可导函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧 $f'(x)$ 的符号不同；

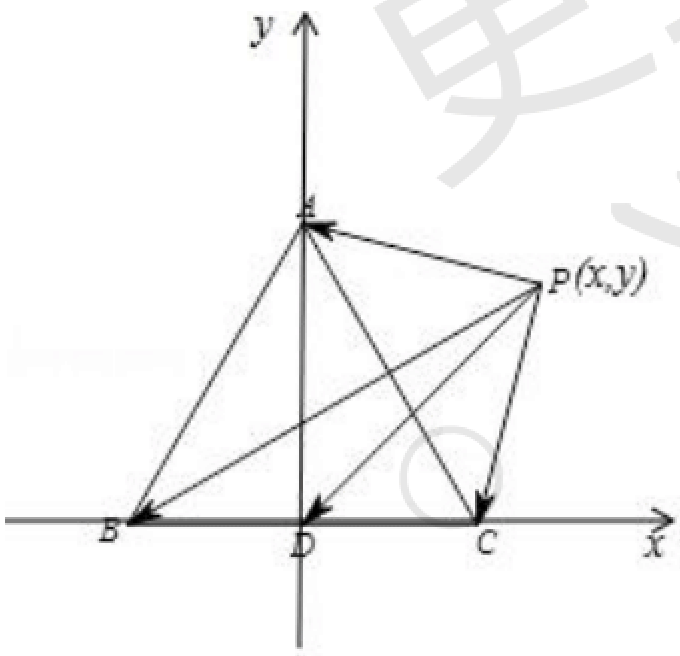
（2）若 $f(x)$ 在 $(a，b)$ 内有极值，那么 $f(x)$ 在 $(a，b)$ 内绝不是单调函数，即在某区间上单调增或减的函数没有极值．

12．D

【解析】

【详解】

以 BC 中点为坐标原点，建立如图所示的坐标系，



则 A（0，$2\sqrt{3}$），B（－2，0），C（2，0），

设 P（x，y），则 $\overrightarrow{PA}$=（－x，$2\sqrt{3}$－y），

$\overrightarrow{PB}$=（－2－x，－y），

$\overrightarrow{PC}$=（2－x，－y），

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-x\cdot(-2x)+(2\sqrt{3}-y)\cdot(-2y)$

$=2x^2-4\sqrt{3}y+2y^2$

$=2[x^2+(y-\sqrt{3})^2-3]$；

所以当 $x=0$，$y=\sqrt{3}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 取得最小值为 $2\times(-3)=-6$.

故选 D.

13．1.96

【解析】

【分析】

根据二项分布 $X\sim B(100,0.02)$，由公式得到结果.

【详解】

由于是有放回的抽样，所以是二项分布 $X\sim B(100,0.02)$，

$DX=npq=100\times0.02\times0.97=1.96$,填 1.96

【点睛】

本题考查离散型随机变量的方差的求法，考查二项分布的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

14．1

【解析】

【详解】

化简三角函数的解析式，

可得 $f(x)=1-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}=-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x+\dfrac{1}{4}=$

$-(\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+1$，

由 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，可得 $\cos x\in[0,1]$，

当 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 1.

15. $\dfrac{2n}{n+1}$

【解析】

设等差数列的首项为a_1，公差为d，由题意有$\begin{cases}a_1+2d=3\\4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}$，

数列的前 n 项和$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n\times1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times1=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

裂项可得$\dfrac{1}{S_k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})$，

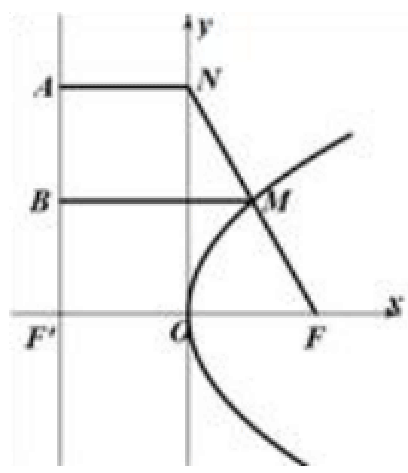
所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=2[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$.

点睛:等差数列的通项公式及前 n 项和公式，共涉及五个量 a_1，a_n，d，n，S_n，知其中三个就能求另外两个，体现了用方程的思想解决问题．数列的通项公式和前 n 项和公式在解题中起到变量代换作用，而 a_1 和 d 是等差数列的两个基本量，用它们表示已知和未知是常用得方法．使用裂项法求和时，要注意正、负项相消时消去了哪些项，保留了哪些项，切不可漏写未被消去的项，未被消去的项有前后对称的特点．

16．6

【解析】

如图所示，不妨设点M位于第一象限，设抛物线的准线与x轴交于点F'，作$MB\perp l$与点B，$NA\perp l$与点A，由抛物线的解析式可得准线方程为$x=-2$，则$AN=2,FF'=4$，在直角梯形$ANFF'$中，中位线$BM=\dfrac{AN+FF'}{2}=3$，由抛物线的定义有：$MF=MB=3$，结合题意，有$MN=MF=3$，故$|FN|=|FM|+|NM|=3+3=6$.



点睛:抛物线的定义是解决抛物线问题的基础，它能将两种距离(抛物线上的点到焦点的

距离、抛物线上的点到准线的距离)进行等量转化．如果问题中涉及抛物线的焦点和准线，又能与距离联系起来，那么用抛物线定义就能解决问题．因此，涉及抛物线的焦半径、焦点弦问题，可以优先考虑利用抛物线的定义转化为点到准线的距离，这样就可以使问题简单化．

17．（1）$\frac{15}{17}$；（2）2．

【解析】

试题分析：（1）利用三角形的内角和定理可知 $A+C=\pi-B$，再利用诱导公式化简 $sin\left(A+C\right)$，利用降幂公式化简 $8\sin^2\frac{B}{2}$，结合 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$，求出 $\cos B$；（2）由（1）可知 $\sin B=\frac{8}{17}$，利用三角形面积公式求出 ac，再利用余弦定理即可求出 b．

试题解析：（1）$\sin\left(A+C\right)=8\sin^2\frac{B}{2}$，$\therefore \sin B=4\left(1-\cos B\right)$，$\because \sin^2 B+\cos^2 B=1$，

$\therefore 16\left(1-\cos B\right)^2+\cos^2 B=1$，$\therefore \left(17\cos B-15\right)\left(\cos B-1\right)=0$，$\therefore \cos B=\frac{15}{17}$；

（2）由（1）可知 $\sin B=\frac{8}{17}$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=2$，$\therefore ac=\frac{17}{2}$，

$\therefore$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{17}=a^2+c^2-15=\left(a+c\right)^2-2ac-15=36-17-15=4$

，

$\therefore b=2$．

18．（1）0.4092；（2）见解析；（3）$52.35kg$．

【解析】

试题分析：（1）利用相互独立事件概率公式即可求得事件 A 的概率估计值；（2）写出列联表计算 K^2 的观测值，即可确定有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关；（3）结合频率分布直方图估计中位数为 $52.35kg$．

试题解析：（1）记 B 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”，C 表示事件“新养殖法的箱产量不低于 50kg”

由题意知　$P\left(A\right)=P\left(BC\right)=P\left(B\right)P\left(C\right)$

旧养殖法的箱产量低于50kg 的频率为

$(0.040+0.034+0.024+0.014+0.012)\times5=0.62$

故$P(B)$的估计值为 0.62

新养殖法的箱产量不低于50kg 的频率为

$$(0.068+0.046+0.010+0.008)\times5=0.66$$

故$P(C)$的估计值为 0.66

因此，事件 A 的概率估计值为$0.62\times0.66=0.4092$

（2）根据箱产量的频率分布直方图得列联表

	箱产量<50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法	62	38
新养殖法	34	66

$$K^2=\frac{200\times(62\times66-34\times38)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705$$

由于$15.705>6.635$

故有99%的把握认为箱产量与养殖方法有关.

（3）因为新养殖法的箱产量频率分布直方图中，箱产量低于50kg 的直方图面积为

$(0.004+0.020+0.044)\times5=0.34<0.5$，

箱产量低于55kg 的直方图面积为

$(0.004+0.020+0.044+0.068)\times5=0.68>0.5$

故新养殖法箱产量的中位数的估计值为

$50+\dfrac{0.5-0.34}{0.068}\approx52.35$(kg).

点睛:（1）利用独立性检验，能够帮助我们对日常生活中的实际问题作出合理的推断和预测. 独立性检验就是考察两个分类变量是否有关系，并能较为准确地给出这种判断的可信度，随机变量的观测值k值越大，说明“两个变量有关系”的可能性越大.

（2）利用频率分布直方图求众数、中位数和平均数时，应注意三点：①最高的小长方形底边中点的横坐标即众数；②中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的；③平均数是频率分布直方图的“重心”，等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和．

19．（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【详解】

试题分析：（1） 取 PA 的中点 F，连结 EF，BF，由题意证得 $CE // BF$，利用线面平行的判断定理即可证得结论；（2）建立空间直角坐标系，求得半平面的法向量：$\vec{m}=(0,-\sqrt{6},2)$，$\vec{n}=(0,0,1)$，然后利用空间向量的相关结论可求得二面角 $M-AB-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

试题解析：（1）取 PA 中点 F，连结 EF，BF．

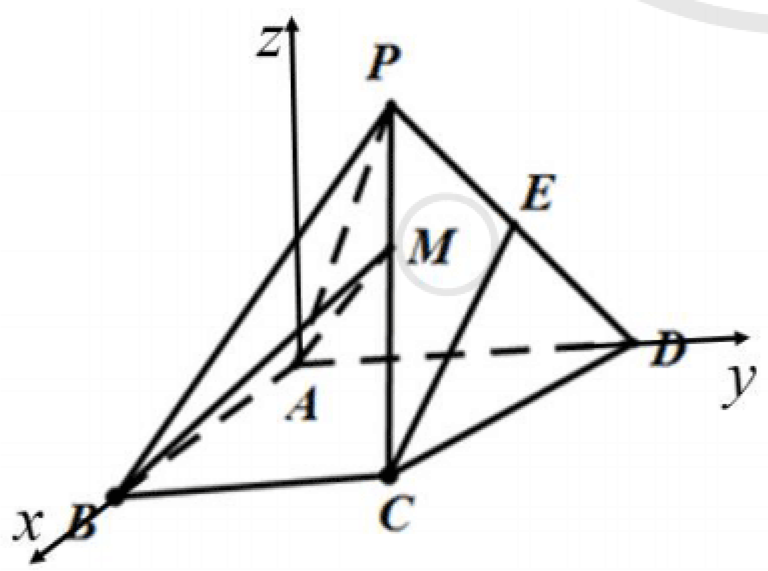
因为 E 为 PD 的中点，所以 $EF//AD$，$EF=\dfrac{1}{2}AD$，由 $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$ 得 $BC//AD$，

又 $BC=\dfrac{1}{2}AD$

所以 $EF \underset{=}{//} BC$．四边形 $BCEF$ 为平行四边形，$CE//BF$．

又 $BF \subset 平面PAB$，$CE \not\subset 平面PAB$，故 $CE//平面PAB$

（2）



由已知得 $BA \perp AD$，以 A 为坐标原点，$\overline{AB}$ 的方向为 x 轴正方向，$\left|\overline{AB}\right|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 A-xyz,则

则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{PC}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(1,0,0\right)$ 则

$\overrightarrow{BM}=\left(x-1,\ y,\ z\right)$, $\overrightarrow{PM}=\left(x,\ y-1,\ z-\sqrt{3}\right)$

因为 BM 与底面 ABCD 所成的角为 45°，而 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$ 是底面 ABCD 的法向量，所以

$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BM},\vec{n}\right\rangle\right|=\sin45^0$，$\dfrac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

即（x-1）²+y²-z²=0

又 M 在棱 PC 上,设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$,则

$x=\lambda, y=1, z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$

由①，②得 $\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ y=1\\ z=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$ (舍去), $\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ y=1\\ z=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$

所以 M$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，从而 $\overrightarrow{AM}=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

设 $\vec{m}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是平面 ABM 的法向量，则

$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ m\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\left(2-\sqrt{2}\right)x_0+2y_0+\sqrt{6}z_0=0\\ x_0=0\end{cases}$

所以可取 $\vec{m}=(0,-\sqrt{6},2)$. 于是 $cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

因此二面角 M-AB-D 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

点睛:（1）求解本题要注意两点：①两平面的法向量的夹角不一定是所求的二面角，②利用方程思想进行向量运算，要认真细心、准确计算.

（2）设 m，n 分别为平面α，β的法向量，则二面角θ与<m，n>互补或相等，故有$|\cos\theta|=|\cos\langle m, n\rangle|=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$. 求解时一定要注意结合实际图形判断所求角是锐角还是钝角.

20.（1）$x^2+y^2=2$；（2）见解析.

【解析】

【详解】

试题分析：(1) 转移法求轨迹：设所求动点坐标及相应已知动点坐标，利用条件列两种坐标关系，最后代入已知动点轨迹方程，化简可得所求轨迹方程；(2) 证明直线过定点问题，一般方法是以算代证：即证$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，先设 P（m，n），则需证$3+3m-tn=0$，即根据条件$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$可得$-3m-m^2+tn-n^2=1$，而$m^2+n^2=2$，代入即得$3+3m-tn=0$.

试题解析：解：(1) 设 P（x，y），M（x_0,y_0）,则 N（$x_0,0$），$\overrightarrow{NP}=(x-x_0,y),\overrightarrow{MN}=(0,y_0)$

由$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$得$x_0=0$，$y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$.

因为 M（x_0,y_0）在 C 上，所以$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

因此点 P 的轨迹为$x^2+y^2=2$.

由题意知 F（-1,0），设 Q（-3，t），P（m，n），则

$\overrightarrow{OQ}=-3$，$t,\overrightarrow{PF}=-1-m,-n,\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=3+3m-tn$，

$\overrightarrow{OP}=m$，$n,\overrightarrow{PQ}=(-3-m$，$t-n)$.

由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$得-3m-$m^2$+tn-$n^2$=1，又由（1）知$m^2+n^2=2$，故 3+3m-tn=0.

所以$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，即$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{PF}$.又过点 P 存在唯一直线垂直于 OQ，所以过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

点睛:定点、定值问题通常是通过设参数或取特殊值来确定“定点”是什么、“定值”是多少，或者将该问题涉及的几何式转化为代数式或三角问题，证明该式是恒成立的. 定点、定值问题同证明问题类似，在求定点、定值之前已知该值的结果，因此求解时应设参数，运用推理，到最后必定参数统消，定点、定值显现.

21.（1）a=1；（2）见解析.

【解析】

【分析】

（1）通过分析可知f（x）≥0 等价于 h（x）＝$ax-a-lnx$≥0，进而利用 h'（x）＝$a-\dfrac{1}{x}$可得

$h(x)_{min}=h(\frac{1}{a})$，从而可得结论；

（2）通过（1）可知 $f(x)=x^2-x-xlnx$，记 $t(x)=f'(x)=2x-2-lnx$，解不等式可知 $t(x)_{min}=t(\frac{1}{2})=ln2-1<0$，从而可知 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0，x_2，利用 $f(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0 及 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $f(x_0)<\frac{1}{4}$，另一方面可知 $f(x_0)>f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}$.

【详解】

（1）解：因为 $f(x)=ax^2-ax-xlnx=x(ax-a-lnx)(x>0)$，

则 $f(x)\geq 0$ 等价于 $h(x)=ax-a-lnx\geq 0$，求导可知 $h'(x)=a-\frac{1}{x}$.

则当 $a\leq 0$ 时 $h'(x)<0$，即 $y=h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x_0>1$ 时，$h(x_0)<h(1)=0$，矛盾，故 $a>0$.

因为当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时 $h'(x)<0$、当 $x>\frac{1}{a}$ 时 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)_{min}=h(\frac{1}{a})$，

又因为 $h(1)=a-a-ln1=0$，

所以 $\frac{1}{a}=1$，解得 $a=1$；

另解：因为 $f(1)=0$，所以 $f(x)\geq 0$ 等价于 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的最小值为 $f(1)$，

所以等价于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是极小值，

所以解得 $a=1$；

（2）证明：由（1）可知 $f(x)=x^2-x-xlnx$，$f'(x)=2x-2-lnx$，

令 $f'(x)=0$，可得 $2x-2-lnx=0$，记 $t(x)=2x-2-lnx$，则 $t'(x)=2-\frac{1}{x}$，

令 $t'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{2}$，

所以 $t(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $t(x)_{min}=t(\frac{1}{2})=ln2-1<0$，从而 $t(x)=0$ 有解，即 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0，x_2，

且不妨设 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为正、在 (x_0,x_2) 上为负、在 $(x_2,+\infty)$ 上为正，

所以 $f(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0，且 $2x_0-2-lnx_0=0$，

所以 $f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0lnx_0=x_0^2-x_0+2x_0-2x_0^2=x_0-x_0^2$，

由 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $f(x_0)<(x_0-x_0^2)_{max}=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

由 $f'(\frac{1}{e})<0$ 可知 $x_0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0, \frac{1}{e})$ 上单调递减，

所以 $f(x_0)>f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}$；

综上所述，$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的极值，考查运算求解能力，考查转化思想，注意解题方法的积累，属于难题.

22.（1）$(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$；（2）$2+\sqrt{3}$

【解析】

【详解】

试题分析：（1）设出 P 的极坐标，然后由题意得出极坐标方程，最后转化为直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$；

（2）利用（1）中的结论，设出点的极坐标，然后结合面积公式得到面积的三角函数，结合三角函数的性质可得 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$.

试题解析：解：（1）设 P 的极坐标为（ρ,θ）（$\rho>0$），M 的极坐标为 (ρ_1,θ)（$\rho_1>0$）

由题设知

$|OP|=\rho$，$|OM|=\rho_1=\frac{4}{\cos\theta}$.

由 $|OM|\cdot|OP|=16$ 得 C_2 的极坐标方程 $\rho=4\cos\theta(\rho>0)$

因此 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$.

（2）设点 B 的极坐标为 (ρ_B,α) （$\rho_B>0$）.由题设知|OA|=2，$\rho_B=4\cos\alpha$，于是△OAB 面积

$$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot\rho_B sin\angle AOB=4\cos\alpha\cdot|\sin\alpha-\frac{\pi}{3}|=2|\sin 2\alpha-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}|\leq 2+\sqrt{3}$$

当 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$ 时， S 取得最大值 $2+\sqrt{3}$.

所以△OAB 面积的最大值为$2+\sqrt{3}$.

点睛:本题考查了极坐标方程的求法及应用，重点考查了转化与化归能力.在求曲线交点、距离、线段长等几何问题时，求解的一般方法是将其化为普通方程和直角坐标方程后求解，或者直接利用极坐标的几何意义求解.要结合题目本身特点，确定选择何种方程.

23．(1) 见解析(2) 见解析

【解析】

【分析】

（1）由柯西不等式即可证明，

（2）由 $a^3+b^3=2$ 转化为$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，再由均值不等式可得：

$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\le(\frac{a+b}{2})^2$，即可得到$\frac{1}{4}$（$a+b$）$^3\le2$，问题得以证明.

【详解】

证明：（1）由柯西不等式得：$(a+b)$ $(a^5+b^5)\ge(a^3+b^3)^2=4$，当且仅当 $ab^5=ba^5$，即 $a=b=1$ 时取等号；

（2）∵$a^3+b^3=2$，

∴（$a+b$）（a^2-ab+b^2）$=2$，

∴（$a+b$）[（$a+b$）^2-3ab]$=2$，

∴（$a+b$）^3-3ab（$a+b$）$=2$，

∴$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，

由均值不等式可得：$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\le(\frac{a+b}{2})^2$

∴（$a+b$）$^3-2\le\frac{3(a+b)^3}{4}$，

∴$\frac{1}{4}$（$a+b$）$^3\le2$，

∴$a+b\le2$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立.

【点睛】

本题考查了不等式的证明，掌握柯西不等式和均值不等式是关键，属于中档题.