2017 年普通高等学校招生全国统一考试（全国卷 2）

文科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡相应位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{1,2,3\},B=\{2,3,4\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,3,4\}$

2. $(1+i)(2+i)=$

A. $1-i$　　B. $1+3i$　　C. $3+i$　　D. $3+3i$

3. 函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期为

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

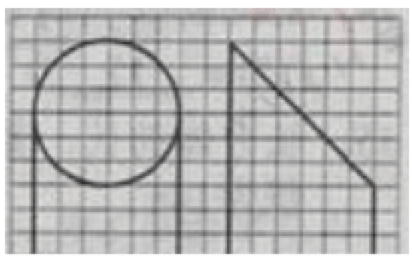
4. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\mathbf{b}|=|\boldsymbol{a}-\mathbf{b}|$ 则

A. $\boldsymbol{a}\perp\mathbf{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\mathbf{b}|$　　C. $\boldsymbol{a}\parallel\mathbf{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|>|\mathbf{b}|$

5. 若 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是

A. $(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(\sqrt{2},2)$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(1,2)$

6. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为



A. 90π

B. 63π

C. 42π

D. 36π

7. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\2x-3y+3\ge 0\\y+3\ge 0\end{cases}$ 。则 $z=2x+y$ 的最小值是

A. -15　　B. -9　　C. 1　　D 9

8. 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是

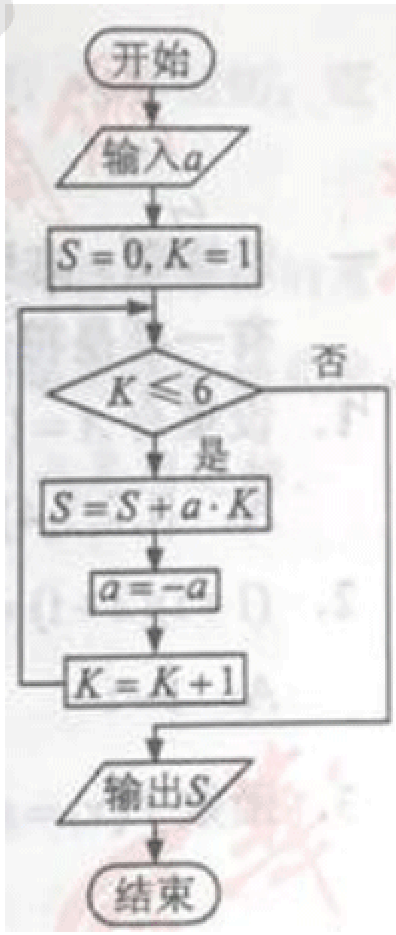
A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

9. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说，你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩，根据以上信息，则

A. 乙可以知道两人的成绩　　B. 丁可能知道两人的成绩

C. 乙、丁可以知道对方的成绩　　D. 乙、丁可以知道自己的成绩

10. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 S=



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

11. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{2}{5}$

12. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN\perp l$，则 M 到直线 NF 的距离为

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

二、填空题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，

则 $f(2)=$________

15. 长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为

____

16. ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $B=$

____

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17 至 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

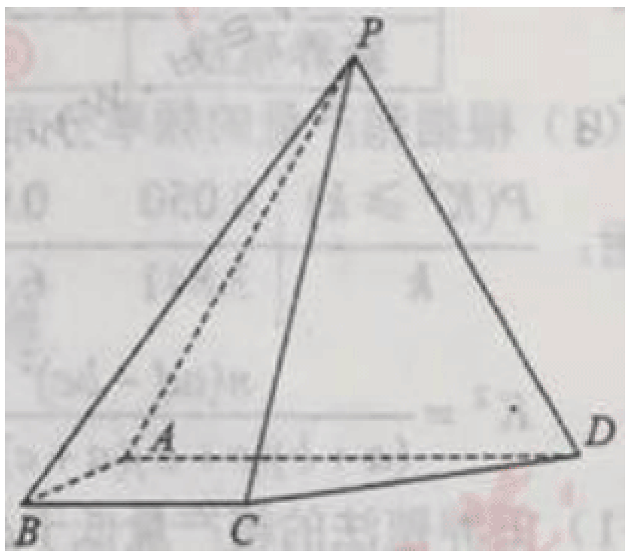
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n, a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$.

（1）若 $a_3+b_3=5$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $T_3=21$，求 S_3.

18.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$。

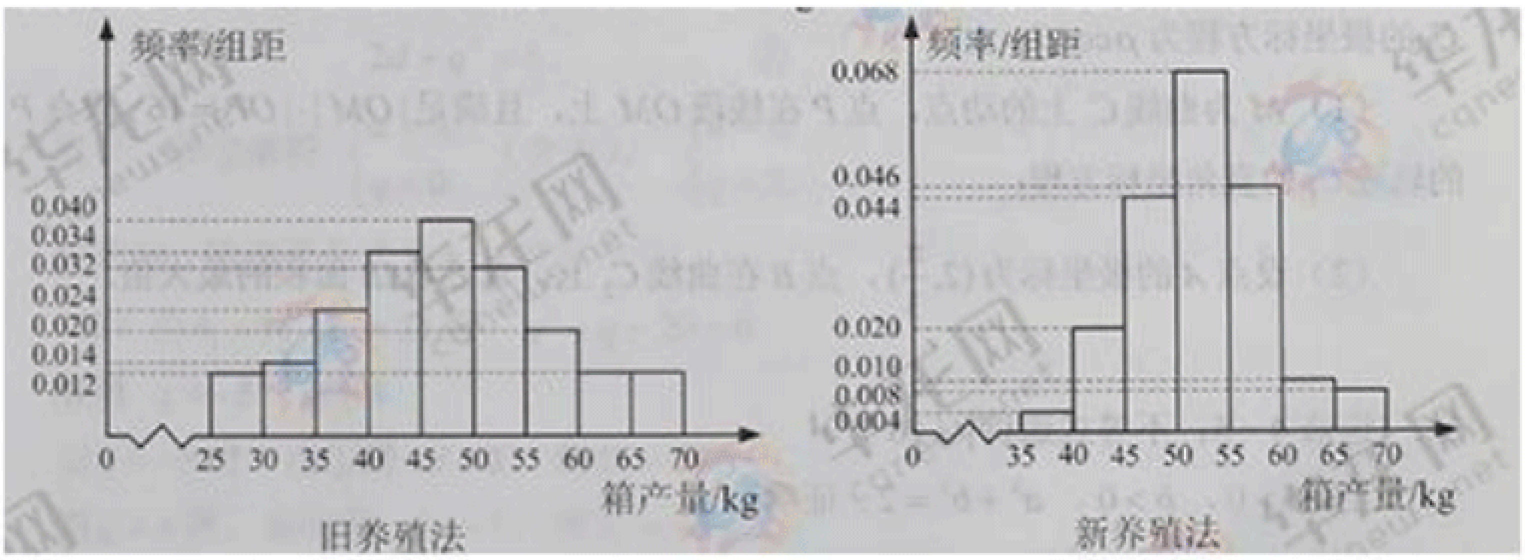


（1） 证明：直线 $BC//$ 平面 PAD；

（2） 若 ΔPCD 的面积为 $2\sqrt{7}$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。

19.（12 分）

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如下：



（1） 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”，估计 A 的概率；

（2） 填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3） 根据箱产量的频率分布直方图，对两种养殖方法的优劣进行较。

附：

P（$K^2 \geq k$）	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20.（12 分）

设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 做 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

（21）（12 分）

设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq ax+1$，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为 $(2,\dfrac{\pi}{3})$，点 B 在曲线 C_2 上，求 ΔOAB 面积的最大值.

23.［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

已知 $a>0,b>0,a^3+b^3=2$，证明：

（1）$(a+b)(a^5+b^5)\geq 4$；

（2）$a+b\leq 2$.

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（全国卷 2）

文科数学参考答案

一、选择题

1. A　2. B　3. C　4. A　5. C　6. B

7. A　8. D　9. D　10. B　11. D　12. C

二、填空题

13. $\sqrt{5}$　14. 12　15. 14π.　16. $\frac{\pi}{3}$

三、解答题

17.（12 分）

解：设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，则$a_n=-1+(n-1)d, b_n=q^{n-1}$. 由$a_2+b_2=2$得

$$d+q=3. \quad ①$$

（1）由$a_3+b_3=5$得

$$2d+q^2=6 \quad ②$$

联立①和②解得$\begin{cases} d=3, \\ q=0 \end{cases}$（舍去），$\begin{cases} d=1, \\ q=2. \end{cases}$

因此$\{b_n\}$的通项公式$b_n=2^{n-1}$

（2）由$b_1=1, T_3=21$得$q^2+q-20=0$.

解得$q=-5, q=4$

当$q=-5$时，由①得$d=8$，则$S_3=21$.

当$q=4$时，由①得$d=-1$，则$S_3=-6$.

18.（12 分）

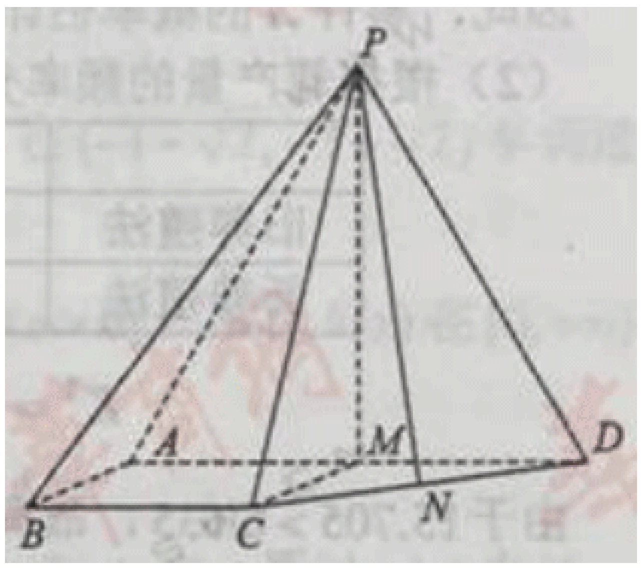
解：

（1）在平面$ABCD$内，因为$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，所以$BC // AD$.

又$BC \not\subset$平面$PAD, AD \subset$平面PAD，

故$BC //$平面PAD

（2）取 AD 的中点 M，连结 PM,CM.



由 $AB=BC=\frac{1}{2}AD$ 及 $BC//AD$，$\angle ABC=90^\circ$

得四边形 $ABCM$ 为正方形，则 $CM\perp AD$.

因为侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，平面 $PAD\bigcap$平面 $ABCD=AD$，

所以 $PM\perp AD,PM\perp$底面 $ABCD$.

因为 $CM\subset$底面 $ABCD$，所以 $PM\perp CM$.

设 $BC=x$，则 $CM=x,CD=\sqrt{2}x,PM=\sqrt{3}x,PC=PD=2x$. 取 CD 的中点 N，连结 PN，则 $PN\perp CD$，所以 $PN=\frac{\sqrt{14}}{2}x$

因为 ΔPCD 的面积为 $2\sqrt{7}$，所以 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x\times\frac{\sqrt{14}}{2}x=2\sqrt{7}$，

解得 $x=-2$（舍去），$x=2$.

于是 $AB=BC=2,AD=4,PM=2\sqrt{3}$.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{2(2+4)}{2}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

19.（12 分）

解：

（1）旧养殖法的箱产量低于 $50kg$ 的频率为

$$(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040)\times5=0.62$$

因此，事件 A 的概率估计值为 0.62

（2）根据箱产量的频率分布直方图得列联表

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法	62	38
新养殖法	34	66

$$K^2=\frac{200\times(62\times66-34\times38)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705$$

由于 15.705＞6.635，故有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关.

（3）箱产量的频率分布直方图表明：新养殖法的箱产量平均值(或中位数)在 50kg 到 55kg 之间，旧养殖法的箱产量平均值（或中位数）在 45kg 到 50kg 之间，且新养殖法的箱产量分布集中程度较旧养殖法的箱产量分布集中程度高，因此，可以认为新养殖法的箱产量较高且稳定，从而新养殖法优于旧养殖法.

20.（12 分）

解：

（1）设 $P(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，

则 $N(x_0,0),\overrightarrow{NP}=(x-x_0,y),\overrightarrow{NM}=(0,y_0)$

由 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 得　　$x_0=x,y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$

因为 $M(x_0,y_0)$ 在 C 上，所以 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$

因此点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=2$

（2）由题意知 $F(-1,0)$

设 $Q(-3,t),P(m,n)$，则

$\overrightarrow{OQ}=(-3,t),\overrightarrow{PF}=(-1-m,-n),\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{PF}=3+3m-tn$，

$\overrightarrow{OP}=(m,n),\overrightarrow{PQ}=(-3-m,t-n)$

由 $\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$ 得 $-3m-m^2+tn-n^2=1$

又由（1）知 $m^2+n^2=2$，故

$3+3m-tn=0$

所以 $\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{PF}=0$，即 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{PF}$.

又过点 P 存在唯一直线垂直于 OQ，

所以过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

（21）（12 分）

解：

（1） $f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1-\sqrt{2},x=-1+\sqrt{2}$

当 $x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})$ 时， $f'(x)<0$；

当 $x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ 时， $f'(x)>0$；

当 $x\in(-1+\sqrt{2},+\infty)$ 时， $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{2}),(-1+\sqrt{2},+\infty)$ 单调递减，在 $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ 单调递增.

（2） $f(x)=(1+x)(1-x)e^x$

当 $a\geq 1$ 时，

设函数 $h(x)=(1-x)e^x,h'(x)=-xe^x<0(x<0)$ ，

因此 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，

而 $h(0)=1$， 故 $h(x)\leq 1$，

所以 $f(x)=(x+1)h(x)\leq x+1\leq ax+1$

当 $0<a<1$ 时，

设函数 $g(x)=e^x-x-1,g'(x)=e^x-1>0(x>0)$ ，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

而 $g(0)=0$， 故 $e^x\geq x+1$

当 $0<x<1$ 时，

$f(x)>(1-x)(1+x)^2$， $(1-x)(1+x)^2-ax-1=x(1-a-x-x^2)$，

取 $x_0=\dfrac{\sqrt{5-4a}-1}{2}$，

则 $x_0\in(0,1),(1-x_0)(1+x_0)^2-ax_0-1=0$ ，

故 $f(x_0)>ax_0+1$

当 $a\leq 0$ 时，

取 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $x_0\in(0,1), f(x_0)>(1-x_0)(1+x_0)^2=1\ge ax_0+1$

综上，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

解：

（1）设 P 的极坐标为 $(\rho,\theta)(\rho>0)$，M 的极坐标为 $(\rho_1,\theta)(\rho_1>0)$.

由题设知 $|OP|=\rho, |OM|=\rho_1=\frac{4}{\cos\theta}$

由 $|OM|\bullet|OP|=16$ 得 C_2 的极坐标方程 $\rho=4\cos\theta(\rho>0)$

因此 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4(x\ne 0)$

（2）设点 B 的极坐标为 $(\rho_B,\theta)(\rho_B>0)$.

由题设知 $|OA|=2, \rho_B=4\cos a$，

于是 ΔOAB 面积

$$S=\frac{1}{2}|OA|\bullet\rho_B\bullet\sin\angle AOB$$

$$=4\cos a\bullet|\sin(a-\frac{\pi}{3})|$$

$$=2|\sin(2a-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}|$$

$$\le 2+\sqrt{3}.$$

当 $a=-\frac{\pi}{12}$ 时，S 取得最大值 $2+\sqrt{3}$

所以 ΔOAB 面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

解：

（1）$(a+b)(a^5+b^5)=a^6+ab^5+a^5b+b^6$

$$=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3+ab(a^4+b^4)$$

$$=4+ab(a^2-b^2)^2$$

≥ 4

（2）因为$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= 2 + 3ab(a+b)$

$\leq 2 + \dfrac{3(a+b)^2}{4}(a+b)$

$= 2 + \dfrac{3(a+b)^3}{4}$

所以$(a+b)^3 \leq 8$，因此$a+b \leq 2$.