绝密★启用前

第 I 卷（选择题）

请点击修改第 I 卷的文字说明

一、单选题

1．已知集合 A=$\{(x,y)|\ x^2+y^2=1\}$，B=$\{(x,y)|\ y=x\}$，则 A$\bigcap$B 中元素的个数为

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

2．设复数 z 满足(1+i)z=2i，则∣z∣=

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

3．某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图.

根据该折线图，下列结论错误的是

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7,8 月份

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

4．$(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

A．-80　　B．-40　　C．40　　D．80

5．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0,b＞0)的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$,且与椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点，则 C 的方程为

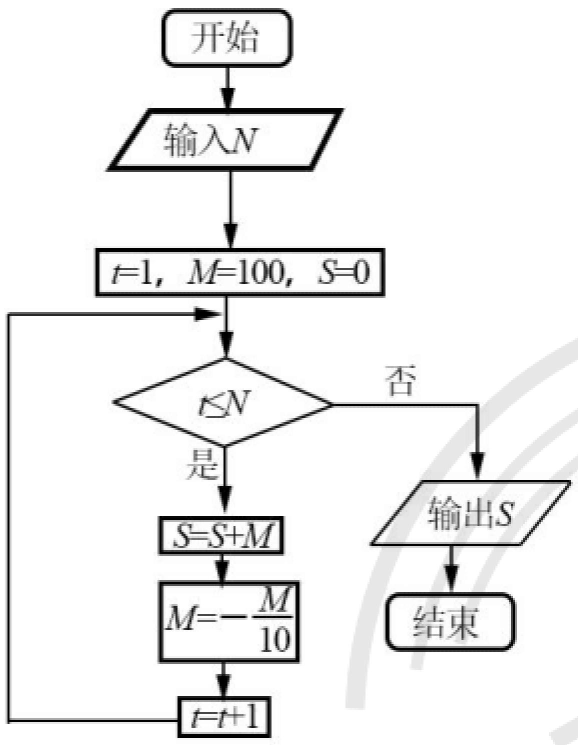
A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　D．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

6．设函数 f(x)=cos(x+$\frac{\pi}{3}$)，则下列结论错误的是

A．f(x)的一个周期为−2π　　B．y=f(x)的图像关于直线 x=$\frac{8\pi}{3}$ 对称

C．f(x+π)的一个零点为 x=$\frac{\pi}{6}$　D．f(x)在($\frac{\pi}{2}$,π)单调递减

7．执行下面的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为



A．5　　B．4　　C．3　D．2

8．已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

9．等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差不为 0．若 a_2，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$前 6 项的和为

A．-24　　B．-3　　C．3　　D．8

10．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，（a>b>0）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

11．已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 a=

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

12. 在矩形 ABCD 中，AB=1，AD=2，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

第 II 卷（非选择题）

请点击修改第 II 卷的文字说明

二、填空题

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y-2\leq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$，则 $z=3x-4y$ 的最小值为__________.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$, $a_1-a_3=-3$，则 $a_4=$___________.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 0, \\ 2^x, & x>0, \end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是_________。

16. a，b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a，b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 30°角；

②当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 60°角；

③直线 AB 与 a 所称角的最小值为 45°；

④直线 AB 与 a 所称角的最小值为 60°；

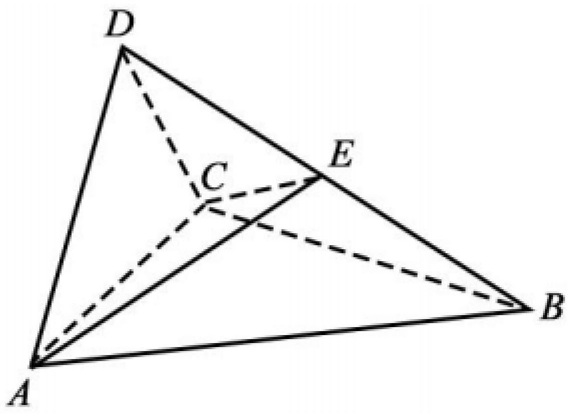
其中正确的是________。（填写所有正确结论的编号）

17.（12 分）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，b=2.

（1）求 c；

（2）设 D 为 BC 边上一点，且 AD⊥AC，求△ABD 的面积.

18.（12 分）如图，四面体 ABCD 中，△ABC 是正三角形，△ACD 是直角三角形，∠ABD=∠CBD，AB=BD.



（1）证明：平面 ACD⊥平面 ABC；

（2）过 AC 的平面交 BD 于点 E，若平面 AEC 把四面体 ABCD 分成体积相等的两部分，求二面角 D–AE–C 的余弦值．

19．（12 分）

已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点（2,0）的直线 l 交 C 与 A,B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆．

（1）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）设圆 M 过点 P（4，-2），求直线 l 与圆 M 的方程．

三、解答题

20．（12 分）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20，25），需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10，15）	[15，20）	[20，25）	[25，30）	[30，35）	[35，40）
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

（1）求六月份这种酸奶一天的需求量 X（单位：瓶）的分布列；

（2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元），当六月份这种酸奶一天的进货量 n（单位：瓶）为多少时，Y 的数学期望达到最大值？

21．（12 分）

已知函数 $f(x)$ =x﹣1﹣alnx．

（1）若 $f(x)\geq 0$ ，求 a 的值；

（2）设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\ldots(1+\frac{1}{2^n})<m$，求 m 的最小值．

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t,\\y=kt,\end{cases}$（t 为参数），直线 l_2 的参数方程为

$\begin{cases}x=-2+m,\\y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$（$m$为参数）．设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为曲线 C．

（1）写出 C 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设 l_3：$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，M 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径．

23．[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 f（x）=│x+1│–│x–2│．

（1）求不等式 f（x）≥1 的解集；

（2）若不等式 f（x）≥x^2–x +m 的解集非空，求 m 的取值范围．

1．B

【解析】由题意可得：圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=x$ 相交于两点 $(1,1)$，$(-1,-1)$，则 $A\cap B$ 中有两个元素．

本题选择 B 选项．

2．C

【解析】由题意可得：$z=\frac{2i}{1+i},\therefore |z|=\frac{|2i|}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

本题选择 C 选项.

3．A

【解析】由折线图，7 月份后月接待游客量减少，A 错误；

本题选择 A 选项.

4．C

【解析】由 $(2x-y)^5$ 展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r$ 可得：

当 $r=3$ 时，$x(2x-y)^5$ 展开式中 x^3y^3 的系数为 $C_5^3\times 2^2\times(-1)^3=-40$

当 $r=2$ 时，$y(2x-y)^5$ 展开式中 x^3y^3 的系数为 $C_5^2\times 2^3\times(-1)^2=80$ ，

则 x^3y^3 的系数为 $80-40=40$.

本题选择 C 选项.

5．B

【解析】由题意可得：$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},c=3$ ，又 $a^2+b^2=c^2$ ，解得 $a^2=4,b^2=5$ ，

则 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

本题选择 B 选项.

6．D

【解析】当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$ ，函数在该区间内不单调.

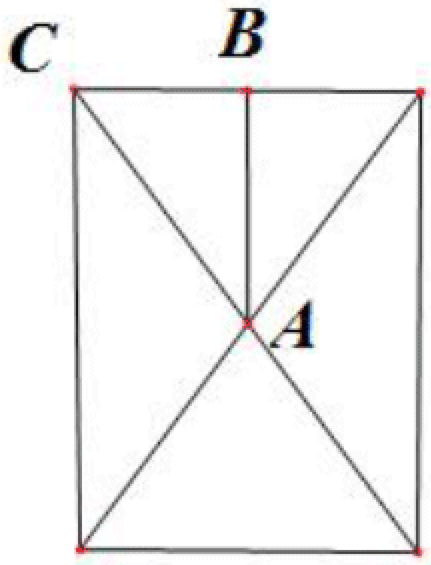
本题选择 D 选项.

7．D

【解析】若 $N=2$,第一次进入循环，$1\le 2$ 成立，$S=100, M=-\dfrac{100}{10}=-10$，$i=2\le 2$ 成立，第二次进入循环，此时 $S=100-10=90, M=-\dfrac{-10}{10}=1$，$i=3\le 2$ 不成立，所以输出 $S=90<91$ 成立，所以输入的正整数 N 的最小值是 2，故选 D.

8．B

【解析】【解析】如果，画出圆柱的轴截面



$AC=1, AB=\dfrac{1}{2}$，所以 $r=BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，那么圆柱的体积是 $V=\pi r^2 h=\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 1=\dfrac{3}{4}\pi$，故选 B.

9．A

【解析】】设等差数列的公差为 $d\neq 0$，$a_3{}^2=a_2\cdot a_6\Rightarrow(1+2d)^2=(1+d)(1+5d)$，$d^2=-2d$，$(d\neq 0)$，所以 $d=-2$，$S_6=6\times 1+\dfrac{6\times 5}{2}\times(-2)=-24$，故选 A.

10．A

【解析】以线段 A_1A_2 为直径的圆是 $x^2+y^2=a^2$，直线 $bx-ay+2ab=0$ 与圆相切，所以圆心到直线的距离 $d=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，整理为 $a^2=3b^2$，即 $a^2=3\left(a^2-c^2\right)\Rightarrow 2a^2=3c^2$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故选 A.

11．C

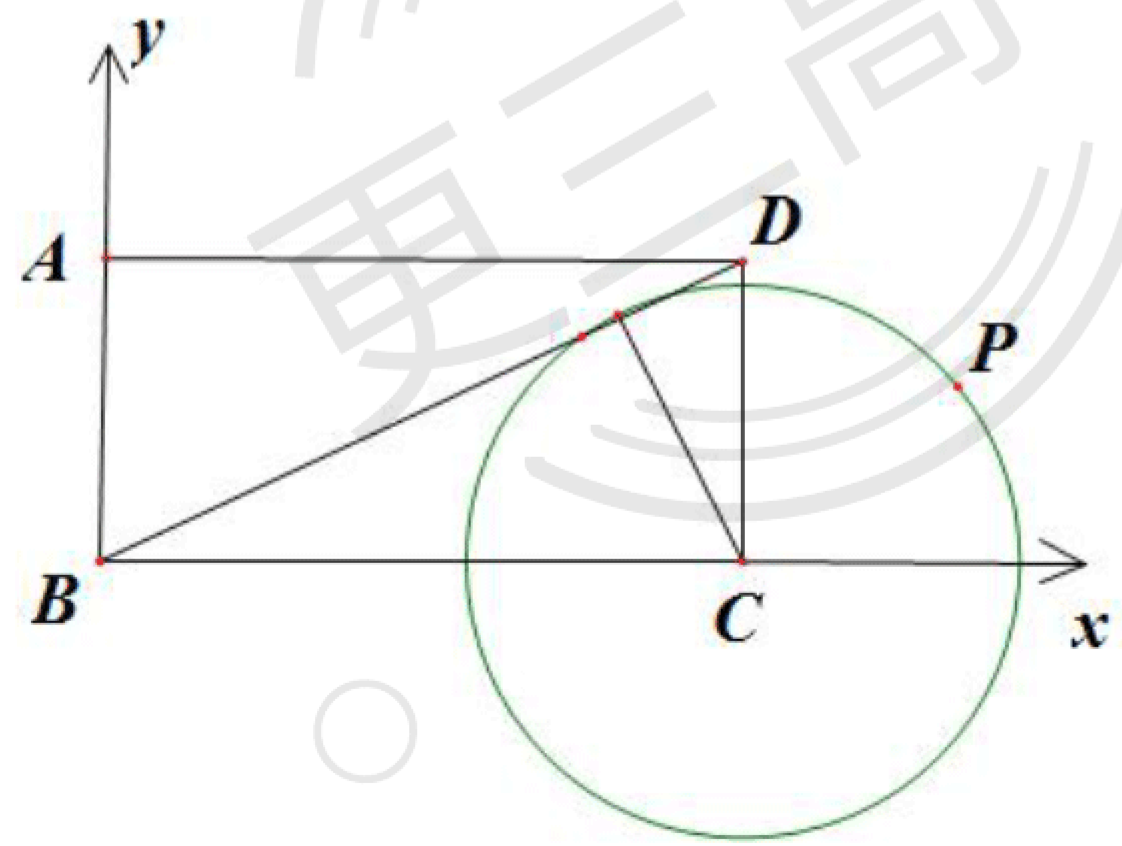
【解析】【解析】$x^2-2x=-a\left(e^{x-1}+e^{-x+1}\right)$，设 $g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}$，

$g'(x)=e^{x-1}-e^{-x+1}=e^{x-1}-\dfrac{1}{e^{x-1}}=\dfrac{e^{2(x-1)}-1}{e^{x-1}}$，当 $g'(x)=0$ 时，$x=1$，当 $x<1$ 时，

$g'(x)<0$ 函数单调递减，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，函数单调递增，当 $x=1$ 时，函数取得最小值 $g(1)=2$，设 $h(x)=x^2-2x$，当 $x=1$ 时，函数取得最小值-1，若 $-a>0$，函数 $h(x)$，和 $ag(x)$ 没有交点，当 $-a<0$ 时，$-ag(1)=h(1)$ 时，此时函数 $h(x)$ 和 $ag(x)$ 有一个交点，即 $-a\times2=-1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$，故选 C.

12．A

【解析】如图，建立平面直角坐标系



设 $A(0,1),B(0,0),D(2,1),P(x,y)$

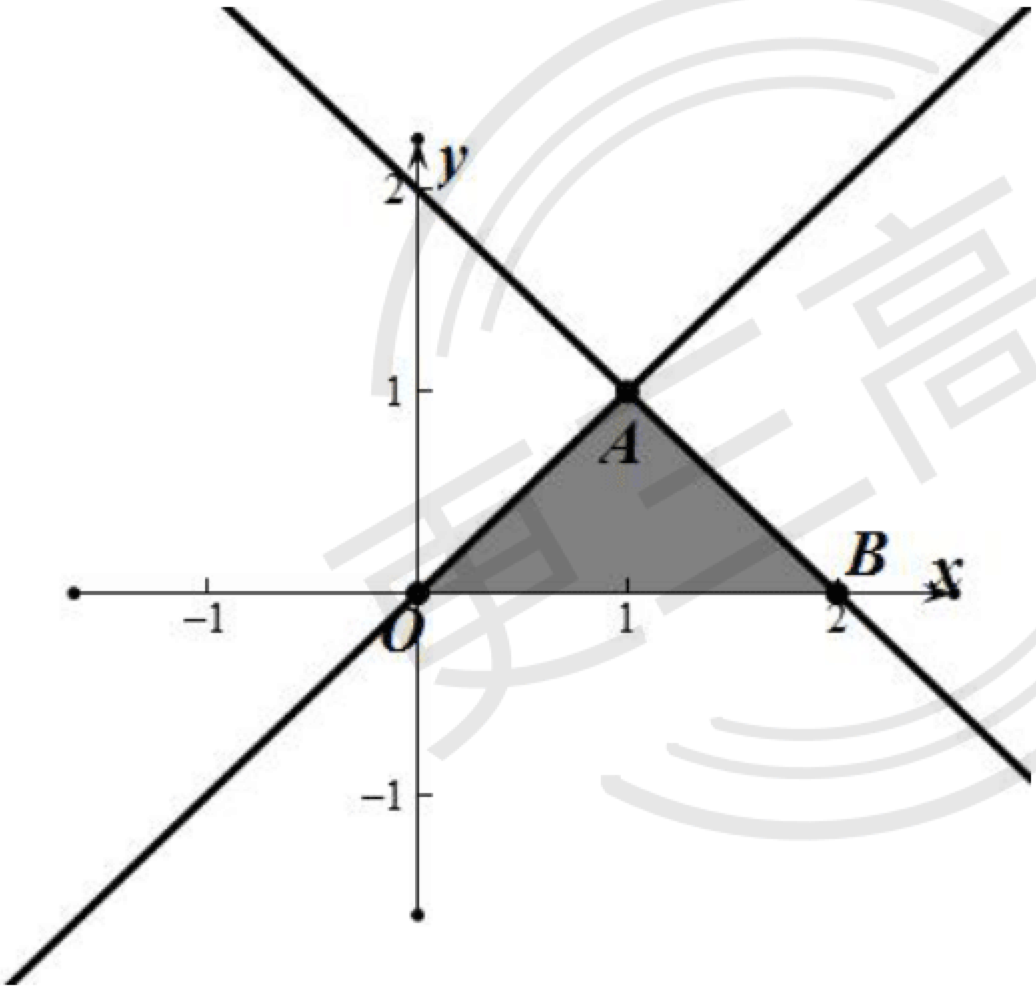
根据等面积公式可得圆的半径是 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，即圆的方程是 $(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$

$\overrightarrow{AP}=(x,y-1),\overrightarrow{AB}=(0,-1),\overrightarrow{AD}=(2,0)$，若满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$

即 $\begin{cases}x=2\mu\\ y-1=-\lambda\end{cases}$ ，$\mu=\dfrac{x}{2},\lambda=1-y$ ，所以 $\lambda+\mu=\dfrac{x}{2}-y+1$，设 $z=\dfrac{x}{2}-y+1$ ，即 $\dfrac{x}{2}-y+1-z=0$，点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ 上，所以圆心到直线的距离 $d\le r$，即 $\dfrac{|2-z|}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}}\le\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ，解得 $1\le z\le3$，所以 z 的最大值是 3，即 $\lambda+\mu$ 的最大值是 3，故选 A.

13．-1

【解析】绘制不等式组表示的可行域，结合目标函数的几何意义可得，目标函数在点 $A(1,1)$ 处取得最小值 $z=3x-4y=-1$.



14．-8

【解析】由题意可得：$\begin{cases}a_1(1+q)=-1\\ a_1(1-q^2)=-3\end{cases}$ ，解得：$\begin{cases}a_1=1\\ q=-2\end{cases}$ ，则 $a_4=a_1q^3=-8$

15．$x>-\dfrac{1}{4}$

【解析】由题意：$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2},x\le 0\\ 2^x+x+\frac{1}{2},0<x\le\frac{1}{2}\\ \left(\sqrt{2}+1\right)2^{x-1},x>\frac{1}{2}\end{cases}$，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,0],\left(0,\frac{1}{2}\right],\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 三段区间内均单调递增，且：$g\left(-\frac{1}{4}\right)=1,2^0+0+\frac{1}{2}>1,\left(\sqrt{2}+1\right)\times 2^{0-1}>1$，

据此 x 的取值范围是：$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$．

16．②③

【解析】由题意，AB 是以 AC 为轴,BC 为底面半径的圆锥的母线，由 $AC\perp a,AC\perp b$，又 AC⊥圆锥底面，在底面内可以过点 B，作 $BD\parallel a$，交底面圆 C 于点 D，如图所示，连结 DE，则 DE⊥BD，$\therefore DE\parallel b$，连结 AD，等腰△ABD 中，$AB=AD=\sqrt{2}$,当直线 AB 与 a 成 60° 角时，$\angle ABD=60^\circ$，故 $BD=\sqrt{2}$，又在 Rt△BDE 中，$BE=2,\therefore DE=\sqrt{2}$，

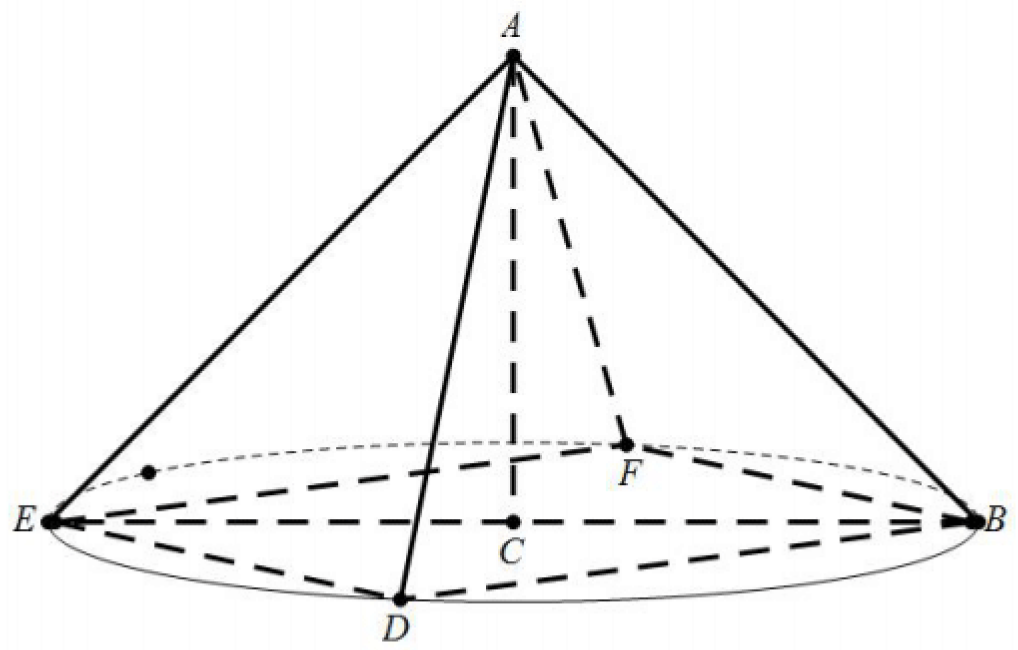
过点 B 作 BF∥DE，交圆 C 于点 F，连结 AF，由圆的对称性可知 $BF=DE=\sqrt{2}$，

$\therefore$△ABF 为等边三角形，$\therefore\angle ABF=60^\circ$，即 AB 与 b 成 60°角，②正确，①错误.

由最小角定理可知③正确；

很明显，可以满足平面 ABC⊥直线 a，直线 AB 与 a 所成的最大角为 90°，④错误.

正确的说法为②③.



17.

（1） $c=4$

（2） $\sqrt{3}$

【解析】

（1）由已知得 $\tan A=-\sqrt{3}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$

在 △ABC 中，由余弦定理得

$28=4+c^2-4c\cos\frac{2\pi}{3}$，即$c^2+2c-24=0$

解得$c=-6$（舍去），c=4

（2）有题设可得 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}$， 所以 $\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\frac{\pi}{6}$

故△ABD 面积与△ACD 面积的比值为 $\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}AC\cdot AD}=1$

又△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times4\times2\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$，所以$\Delta ABD$的面积为$\sqrt{3}$.

18.

（1）见解析

（2）二面角 $D-AE-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【解析】

（1）由题设可得，$\Delta ABD \cong \Delta CBD$, 从而 $AD=DC$

又 ΔACD 是直角三角形，所以 $\angle ACD=90^0$

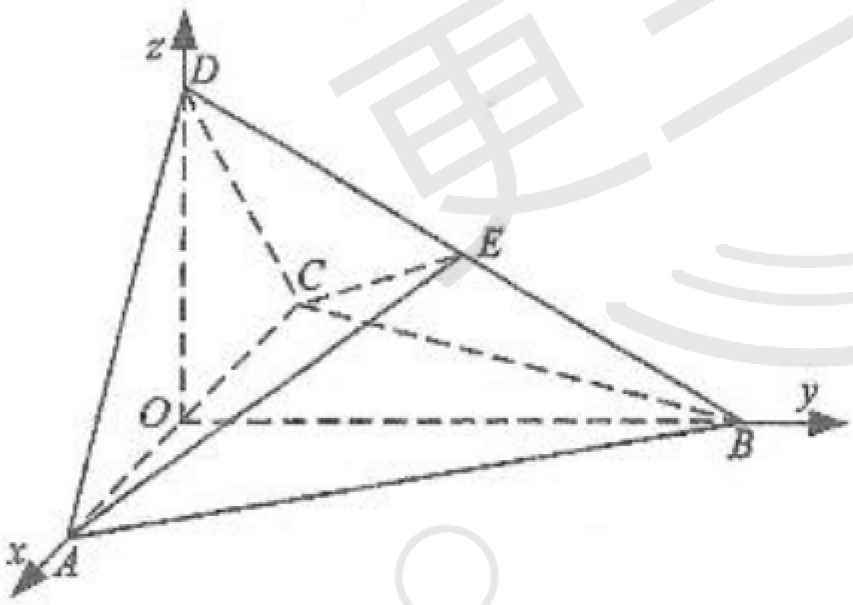
取 AC 的中点 O，连接 DO,BO,则 DO⊥AC,DO=AO

又由于 ΔABC 是正三角形，故 $BO \perp AC$

所以 $\angle DOB$ 为二面角 $D-AC-B$ 的平面角

在 $Rt\Delta AOB$ 中，$BO^2+AO^2=AB^2$
又 $AB=BD$, 所以
$BO^2+DO^2=BO^2+AO^2=AB^2=BD^2$，故∠DOB=$90^0$
所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC

（2）



由题设及（1）知，OA, OB, OD 两两垂直，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴正方向，$\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，则

$A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $C(-1,0,0)$, $D(0,0,1)$

由题设知，四面体 ABCE 的体积为四面体 ABCD 的体积的 $\frac{1}{2}$，从而 E 到平面 ABC 的距离

为 D 到平面 ABC 的距离的 $\frac{1}{2}$，即 E 为 DB 的中点，得 E$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.故

$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1),\overrightarrow{AC}=(-2,0,0),\overrightarrow{AE}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 DAE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+z=0\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 AEC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\bullet\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\bullet\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 同理可得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{3})$

则 $cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

所以二面角 D-AE-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

19.

（1）证明：①当 $AB\perp x$ 轴时，$x=2$ 代入 $y^2=2x$ 得 $y=\pm 2$

$\therefore O$ 在以 AB 为直径的圆上.此时圆半径为 2.

②当 AB 不垂直于 x 轴时，设 AB 的方程为 $y=k(x-2)$ 且 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y^2=2x\\ y=k(x-2)\end{cases}$ 消去 y 整理 $kx^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4k^2+2}{k^2}\\ x_1x_2=4\end{cases}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\frac{2}{k}$，$y_1y_2=k(x_1-2)(x_2-2)=-4$

从而 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1$，$OA\perp OB,O$ 在以 AB 为直径的圆上.

（2）由（1）知以 AB 为直径的圆学&科网的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

即 $x^2+y^2-\frac{4k^2+2}{k^2}(x+y)=0$，

由于 $P(4,-2)$ 在此圆上，

$\therefore$ 代入上述方程得 $k^2=\frac{1}{3}$，故所求圆的方程为 $x^2+y^2-10x-10y=0$.

【解析】

（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),l:x=my+2$

由 $\begin{cases}x=my+2\\y^2=2x\end{cases}$ 可得 $y^2-2my-4=0,$则 $y_1y_2=-4$

又 $x_1=\frac{y_1^2}{2},x_2=\frac{y_2^2}{2},$故$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4}=4$

因此 OA 的斜率与 OB 的斜率之积为 $\frac{y_1}{x_1}\bullet\frac{y_2}{x_2}=\frac{-4}{4}=-1$

所以 OA⊥OB

故坐标原点 O 在圆 M 上.

（2）由（1）可得 $y_1+y_2=2m,x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=2m^2+4$

故圆心 M 的坐标为 $(m^2+2，m)$，圆 M 的半径 $r=\sqrt{(m^2+2)^2+m^2}$

由于圆 M 过点 P（4，-2），因此 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0$，故 $(x_1-4)(x_2-4)+(y_1+2)(y_2+2)=0$

即 $x_1x_2-4(x_1+x_2)+y_1y_2+2(y_1+y_2)+20=0$

由（1）可得 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=4$，

所以 $2m^2-m-1=0$，解得 $m=1$或$m=-\frac{1}{2}$

当 m=1 时，直线 l 的方程为 x-y-2=0，圆心 M 的坐标为（3,1），圆 M 的半径为 $\sqrt{10}$，圆 M 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $2x+y-4=0$，圆心 M 的坐标为 $\left(\frac{9}{4},-\frac{1}{2}\right)$，圆 M 的半径为

$\frac{\sqrt{85}}{4}$，圆 M 的方程为 $\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}$

20.

（1）X 的分布列为

X	200	300	500
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

（2）当 n 为 300 瓶时，y 的数学期望达到最大值。

【解析】

（1）由题意知，X 所有的可能取值为 200,300,500，由表格数据知

$$P(X=200)=\frac{2+16}{90}=0.2$$

$$P(X=300)=\frac{36}{90}=0.4$$

$$P(X=500)=\frac{25+7+4}{90}=0.4$$

.

因此 X 的分布列为

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

⑵由题意知，这种酸奶一天的需求量至多为 500，至少为 200，因此只需考虑 $200\leqslant n\leqslant 500$

当 $300\leqslant n\leqslant 500$ 时，

若最高气温不低于 25，则 Y=6n-4n=2n

若最高气温位于区间 $[20,\ ,25)$，则 Y=6×300+2（n-300）-4n=1200-2n;

若最高气温低于 20，则 Y=6×200+2（n-200）-4n=800-2n;

因此 EY=2n×0.4+（1200-2n）×0.4+(800-2n) ×0.2=640-0.4n

当 $200\leqslant n<300$ 时，

若最高气温不低于 20，则 Y=6n-4n=2n;

若最高气温低于 20，则 Y=6×200+2（n-200）-4n=800-2n;

因此 EY=2n×(0.4+0.4)+(800-2n)×0.2=160+1.2n

所以 n=300 时，Y 的数学期望达到最大值，最大值为 520 元。

21.

（1）见解析

（2）$m_{\min}=1$

【解析】

（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

①若$a\le 0$，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a\ln 2<0$，所以不满足题意；

②若$a>0$，由$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$知，当$x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,a)$单调递减，在$(a,+\infty)$单调递增，故 x=a 是$f(x)$在$x\in(0,+\infty)$的唯一最小值点.

由于$f(1)=0$，所以当且仅当 a=1 时，$f(x)\ge 0$.

故 a=1

（2）由（1）知当$x\in(1,+\infty)$时，$x-1-\ln x>0$

令$x=1+\frac{1}{2^n}$得$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$，从而

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$$

故$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$

而$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)>2$，所以 m 的最小值为 3.

22.

（1）C 的普通方程为 $x^2-y^2=4$.

（2）l_3 与 C 的交点 M 的极径为 $\sqrt{5}$.

【解析】（1）消去参数 t 得 l_1 的普通方程 $l_1: y=k(x-2)$；消去参数 m 得 l_2 的普通方程

$l_2: y=\dfrac{1}{k}(x+2)$

设 P（x,y）,由题设得 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ y=\dfrac{1}{k}(x+2) \end{cases}$，消去 k 得 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$.

所以 C 的普通方程为 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$

（2）C 的极坐标方程为 $\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=4(0<\theta<2\pi,\theta\neq\pi)$

联立 $\begin{cases} \rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=4 \\ \rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0 \end{cases}$ 得 $\cos\theta-\sin\theta=2(\cos\theta+\sin\theta)$.

故 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$，从而 $\cos^2\theta=\dfrac{9}{10},\sin^2\theta=\dfrac{1}{10}$

代入 $\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=4$ 得 $\rho^2=5$，所以交点 M 的极径为 $\sqrt{5}$.

23.

（1）$f(x)\geq 1$ 的解集为 $[1,+\infty)$.

（2）m 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{5}{4}]$.

【解析】

（1）$f(x)=\begin{cases} -3, & x<-1 \\ 2x-1, & -1\leq x\leq 2 \\ 3, & x>2 \end{cases}$

当 $x<-1$ 时，$f(x)\geq 1$ 无解；

当 $-1\leq x\leq 2$ 时，由 $f(x)\geq 1$ 得，$2x-1\geq 1$，解得 $1\leq x\leq 2$

当 $x>2$ 时，由 $f(x)\geq 1$ 解得 $x>2$.

所以 $f(x)\geq 1$ 的解集为 $\{x|x\geq 1\}$.

（2）由 $f(x)\geq x^2-x+m$ 得 $m\leq |x+1|-|x-2|-x^2+x$，而

$$
\begin{aligned}
|x+1|-|x-2|-x^2+x &\leq |x|+1+|x|-2-x^2+|x| \\
&=-\left(|x|-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \\
&\leq \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

且当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$|x+1|-|x-2|-x^2+x=\frac{5}{4}$.

故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$