

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$, 则 $z=(\quad)$.

A. $1-2i$

B. $1+2i$

C. $1+i$

D. $1-i$

2. 已知集合 $S=\{s|s=2n+1, n\in\mathbb{Z}\}$, $T=\{t|t=4n+1, n\in\mathbb{Z}\}$, 则 $S\cap T=(\quad)$

A. $\emptyset$

B. S

C. T

D. $\mathbb{Z}$

3. 已知命题 $p: \exists x\in\mathbb{R}, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x\in\mathbb{R}, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 $(\quad)$

A. $p\wedge q$

B. $\neg p\wedge q$

C. $p\wedge \neg q$

D. $\neg(p\vee q)$

4. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 $(\quad)$

A. $f(x-1)-1$

B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$

D. $f(x+1)+1$

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()

A. 60 种

B. 120 种

C. 240 种

D. 480 种

7. 把函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x)=$ ()

A. $\sin(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12})$

B. $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$

C. $\sin(2x-\frac{7\pi}{12})$

D. $\sin(2x+\frac{\pi}{12})$

8. 在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()

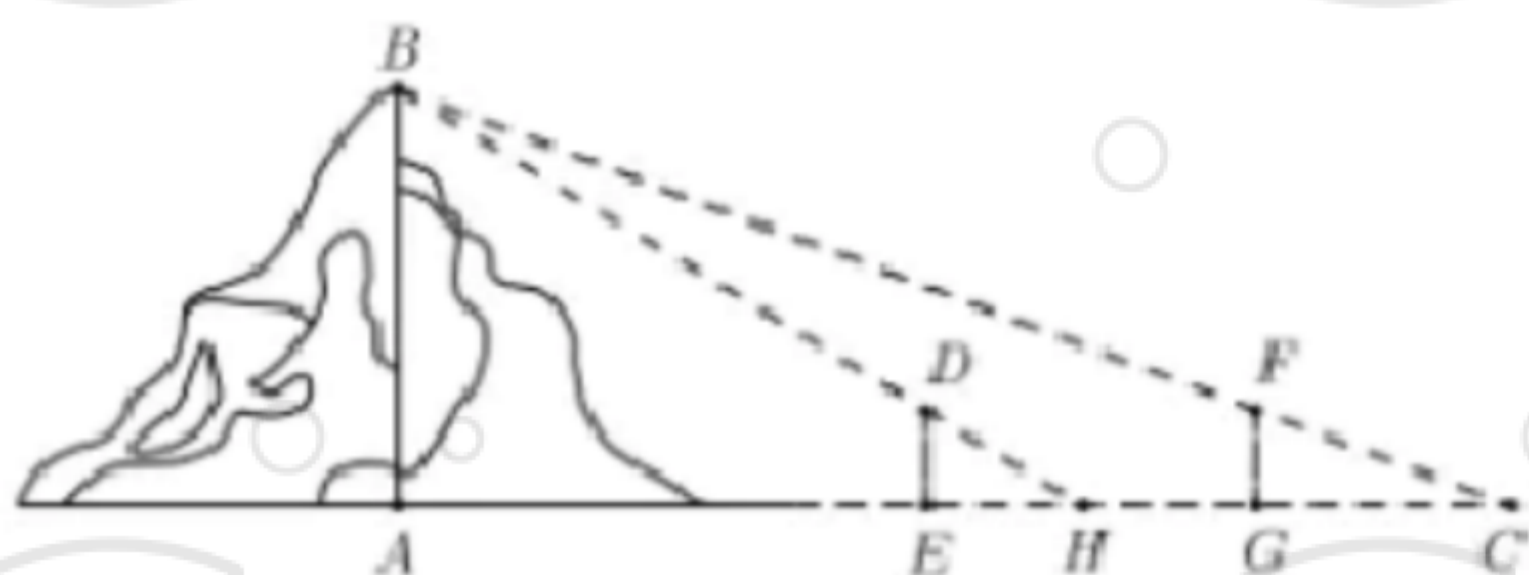
A. $\frac{7}{4}$

B. $\frac{23}{32}$

C. $\frac{9}{32}$

D. $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高。如图，点 E, H, G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”。则海岛的高 AB= () .



(第9题图)

- A: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$
- B: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
- C: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$
- D: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设 $a \neq 0$, 若 $x=a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 () .

- A: $a < b$
- B: $a > b$
- C: $ab < a^2$
- D: $ab > a^2$

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 () .

- A: $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
- B: $[\frac{1}{2}, 1)$
- C: $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$
- D: $(0, \frac{1}{2}]$

12. 设 $a = 2 \ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 () .

- A: $a < b < c$

B: $b < c < a$

C: $b < a < c$

D: $c < a < b$

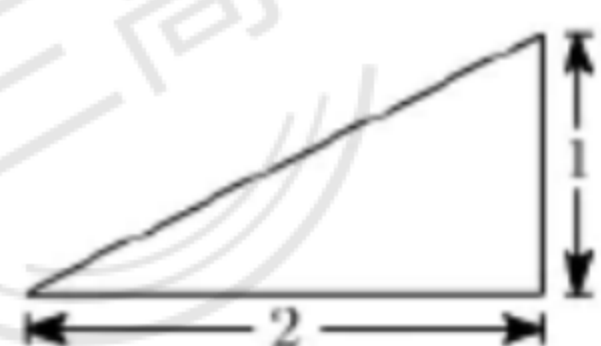
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ ($m > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为_____.

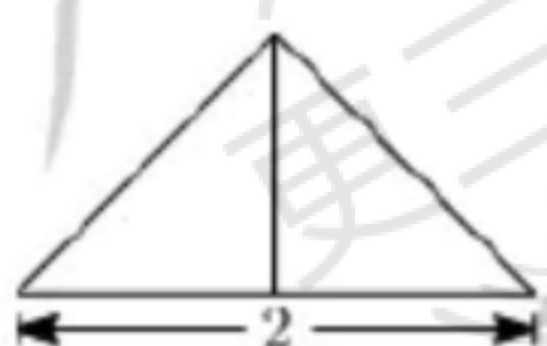
14. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$, 若 $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

16. 以图①为正视图和俯视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____ (写出符合要求的一组答案即可).



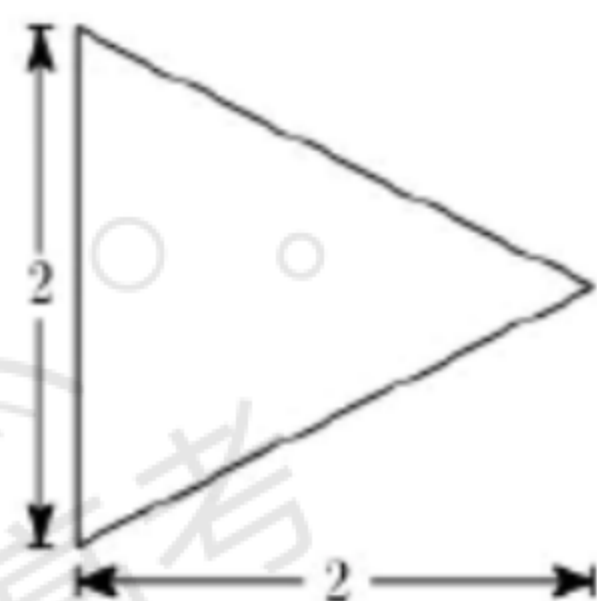
图①



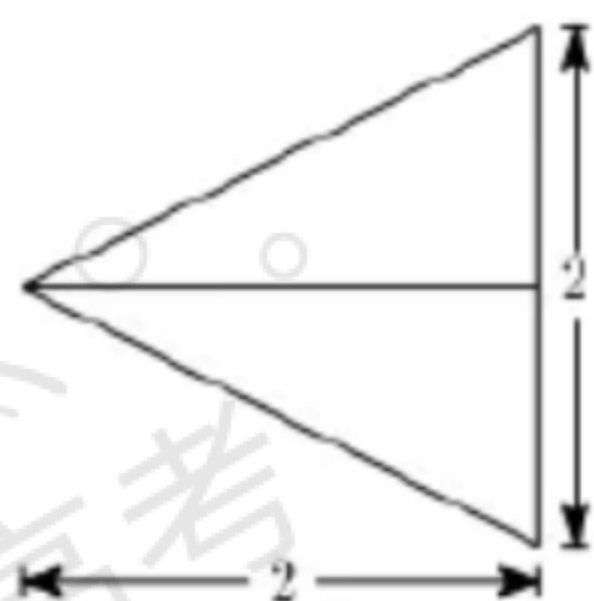
图②



图③



图④



图⑤

(第 16 题图)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某厂研究了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ ，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2

(1) 求 $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_1^2 , s_2^2 ;

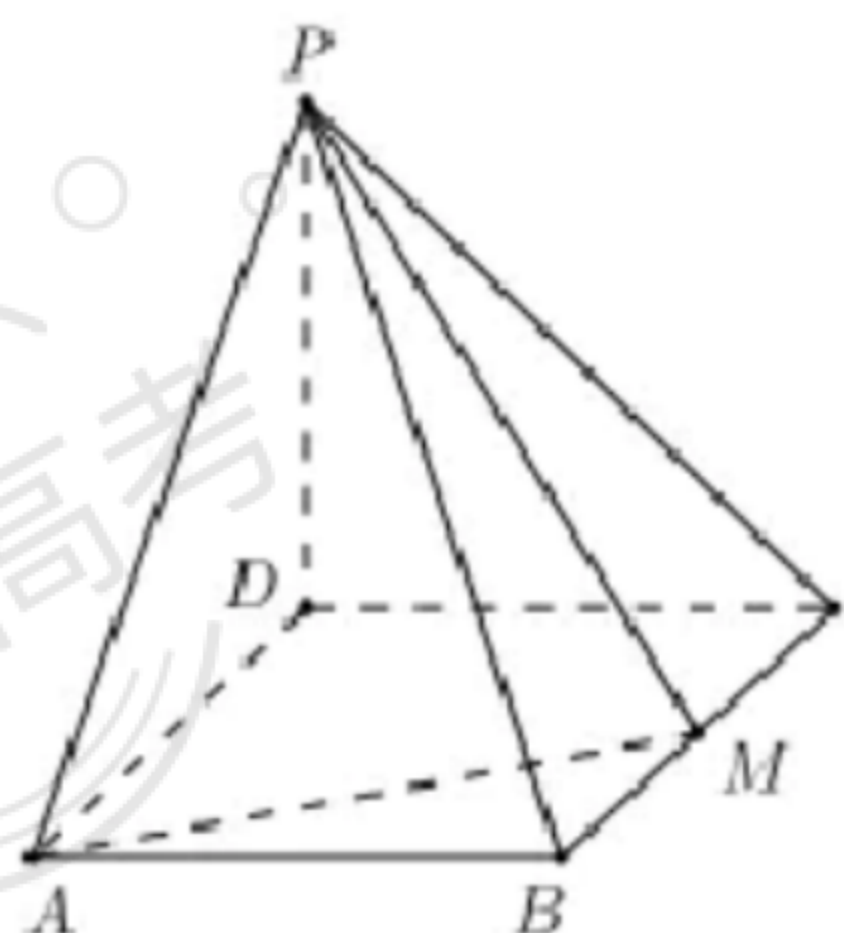
(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高)。

18. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC=1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$,

(1) 求 BC ;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值。



(第 18 题图)

19. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln(a-x)$ ，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点。

(1) 求 a ；

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$ ，证明： $g(x) < 1$ 。

21. (12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4。

(1) 求 p ；

(2) 若点 P 在 M 上， PA, PB 是 C 的两条切线， A, B 是切点，求 ΔPAB 的最大值。

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中， $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$ ，半径为 1。

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程；的极坐标方程化为直角坐标方程；

(2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条直线的极坐标方程。

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集；

(2) 若 $f(x) \geq -a$ ，求 a 的取值范围。