2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷（参考答案）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

1-5 CCABD

6-10 CBBAD

11-12 CB

13. 4

14. $\frac{3}{5}$

15. $2\sqrt{2}$

16. ②⑤或③④

17. 解：（1）各项所求值如下所示

$\bar{x}=\frac{1}{10}(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7)=10.0$

$\bar{y}=\frac{1}{10}(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5)=10.3$

$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(9.7-10.0)^2+2\times(9.8-10.0)^2+(9.9-10.0)^2+2\times(10.0-10.0)^2+(10.1-10.0)^2+2\times(10.2-10.0)^2+(10.3-10.0)^2]=0.36$,

$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(10.0-10.3)^2+3\times(10.1-10.3)^2+(10.3-10.3)^2+2\times(10.4-10.3)^2+2\times(10.5-10.3)^2+(10.6-10.3)^2]=0.4$.

(2) 由(1)中数据得 $\bar{y}-\bar{x}=0.3$, $2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}\approx0.34$

显然 $\bar{y}-\bar{x}<2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，所以不认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18. 解：（1）因为 PD⊥平面 ABCD，且矩形 ABCD 中，AD⊥DC，所以以 $\vec{DA},\vec{DC},\vec{DP}$ 分别为 x，y，z 轴正方向，D 为原点建立空间直角坐标系 D-xyz。

设 BC=t，A（t，0，0），B（t，1，0），M（$\frac{t}{2}$，1，0），P(0,0,1)，所以 $\vec{PB}$=（t，1，-1），$\vec{AM}$=（$-\frac{1}{2}$，1，0），

因为 PB⊥AM，所以 $\vec{PB}\cdot\vec{AM}=-\frac{t^2}{2}+1=0$，所以 $t=\sqrt{2}$，所以 BC=$\sqrt{2}$。

（2）设平面 APM 的一个法向量为 $\mathbf{m}$=（x，y，z），由于$\overrightarrow{AP}$=（$-\sqrt{2}$，0，1），则

$$\begin{cases}\mathbf{m}\bullet\overrightarrow{AP}=-\sqrt{2}x+z=0\\ \mathbf{m}\bullet\overrightarrow{AM}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+y=0\end{cases}$$

令 x=$\sqrt{2}$，得 $\mathbf{m}$=（$\sqrt{2}$，1，2）。

设平面 PMB 的一个法向量为 $\mathbf{n}$=（x^t，y^t，z^t），则

$$\begin{cases}\mathbf{n}\bullet\overrightarrow{CB}=\sqrt{2}x^t=0\\ \mathbf{n}\bullet\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}x^t+y^t-z^t=0\end{cases}$$

令y^t=1，得 $\mathbf{n}$=(0, 1, 1).

所以 cos（$\mathbf{m}$，$\mathbf{n}$）=$\frac{\mathbf{m}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$, 所以二面角 A-PM-B 的正弦值为$\frac{\sqrt{70}}{14}$.

19. （1）由已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$, 则$\frac{b_n}{b_{n+1}}=S_n(n\geqslant 2)$

$\Rightarrow\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2\Rightarrow 2b_{n-1}+2=2b_n\Rightarrow b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant 2)$, $b_1=\frac{3}{2}$

故 $\{b_n\}$ 是以$\frac{3}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列。

（2）由（1）知 $b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}$, 则$\frac{2}{S_n}+\frac{2}{n+2}=2\Rightarrow S_n=\frac{n+2}{n+1}$

n=1 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$

n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$

故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2}, n=1\\ -\frac{1}{n(n+1)}, n\geq 2\end{cases}$

20. （1）[xf(x)]′ =x′ f(x)+xf′ (x)

当 x=0 时，[xf(x)]′ =f(0)=lna=0, 所以 a=1

（2）由 f(x)=ln(1-x), 得 x＜1

当 0＜x＜1 时，f(x)=ln(1-x)＜0，xf(x)＜0；当 x＜0 时，f(x)=ln(1-x)＞0，xf(x)＜0

故即证 x+f(x)＞xf(x), x+ln(1-x)-xln(1-x)＞0

令 1-x=t(t＞0 且 t≠1)，x=1-t, 即证 1-t+lnt-(1-t)lnt＞0

令 f(t)=1-t+lnt-(1-t)lnt, 则

f′ (t)=$-1-\frac{1}{t}-[(-1)\ln t+\frac{1-t}{t}]=-1+\frac{1}{t}+\ln t-\frac{1-t}{t}=\ln t$

所以 f(t)在（0, 1）上单调递减，在（1, +∞）上单调递增，故 f(t)＞f（1）=0, 得证。

21. 解：（1）焦点$F(0,\frac{P}{2})$到$x^2+(y+4)^2=1$的最短距离为$\frac{P}{2}+3=4$，所以 p=2.

（2）抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则

$l_{PA}=y=\frac{1}{2}x_1(x-\chi_1)+y_1=\frac{1}{2}x_1X-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x-y_1$,

$l_{PB}: y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$, 且$x_0^2=-y_0^2-8y_0-15$.

l_{PA}，l_{PB}都过点 $P(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}y_0=\frac{1}{2}x_1x_0-y_1,\\ y_0=\frac{1}{2}x_2x_0-y_2,\end{cases}$故$l_{AB}: y_0=\frac{1}{2}x_0x-y$, 即$y=\frac{1}{2}x_0x-y_0$.

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-y_0\\ x^2=4y\end{cases}$，得$x^2-2x_0x+4y_0=0$，$\Delta=4x_0^2-16y_0$.

所以$|AB|=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{4+x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}$ ，$d_{P\to AB}=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$, 所以

$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{P\to AB}=\frac{1}{2}|x_0^2-4y_0|\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}=\frac{1}{2}(x_4^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(-{y_0}^2-12y_0-15)^{\frac{3}{2}}$.

而$y_0\in[-5,-3]$. 故当 $y_0=-5$ 时，$S_{\Delta PAB}$达到最大，最大值为$20\sqrt{5}$.

22. (1)因为⊙C 的圆心为(2, 1)，半径为 1. 故⊙C 的参数方程为$\begin{cases}x=2+cos\theta\\ y=1+sin\theta\end{cases}$（θ为参数).

(2)设切线 $y=k(x-4)+1$, 即 $kx-y-4k+1=0$. 故

$$\frac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$$

即$|2k|=\sqrt{1+k^2}$, $4k^2=1+k^2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$

故两条切线的极坐标方程为$\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$ 或$\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$.

23. 解：(1) $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|+|x+3|$， 即求$|x-1|+|x-3|\geqslant 6$ 的解集.
当 $x\geqslant1$ 时，$2x+2\geqslant6$, 得 $x\geqslant2$;
当$-3<x<1$ 时, $4\geqslant6$ 此时没有 x 满足条件;
当 $x\leqslant-3$ 时$-2x-2\geqslant6$. 得 $x\leqslant-4$,
综上，解集为$(-\infty,-4]\cup[2,-\infty)$.
(2) $f(x)$最小值$>-a$, 而由绝对值的几何意义，即求 x 到 a 和-3 距离的最小值.
当 x 在 a 和-3 之间时最小，此时 $f(x)$最小值为$|a+3|$, 即$|a+3|>-a$.

$A\geqslant-3$ 时, $2a+3>0$，得 $a>-\frac{3}{2}$；$a<-3$ 时, $-a-3>-a$, 此时 a 不存在.

综上，$a>-\frac{3}{2}$.